Stimmungen und Skalen (Tonleitern)

Akustische Experimente: Mithilfe einer Gitarre, mit dem Programm Audite, mit Python.

Vorkenntnisse:

- Schwingende Saiten haben eine Grundfrequenz f_0 (Wellenlänge = doppelte Saitenlänge). Jedes ganzzahlige Vielfache dieser Frequenz ist ebenfalls möglich. (Partialtöne f_0, $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$,... bzw. Grundton f_0 + Obertöne $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$,...). Experimentell mit der Gitarre und den natürlichen Flagioletts nachvollziehbar.
- Kürzere Saiten erzeugen höhere Töne und schwingen mit einer höheren Frequenz.
- Je nach Saitenlänge erhält man unterschiedliche Tonhöhen. Manche Paare von unterschiedlichen Tönen klingen so ähnlich, dass man ihnen den selben Namen gibt. Sprechweise: die Oktaven nach oben und nach unten.
  Mathematisch gesehen bedeutet der Tonhöhenunterschied von einer Oktav die doppelte Frequenz bzw. die halbe Saitenlänge (mit dem Maßband gemessen).
- Tonhöhenunterschiede nennt man Intervalle. Teilintervalle multiplizieren sich: Die Oktav einer Oktav hat die Frequenz 2*(2f) = 4f, die Oktav davon 8f usw., es ergibt sich die Folge $2^n f$.

Unser Ohr ist es gewohnt, die Vielfachen einer Grundfrequenz wahrzunehmen (Klangfarbe!) und hat sich an das Erkennen von Obertönen gewöhnt. (Ein weiterer Hinweis ist die Grundtonergänzung: Bei Vorliegen der Obertöne alleine glauben wir auch den Grundton wahrzunehmen)

In der Obertonreihe, wo alle Vielfachen des Grundtons vorkommen, sind also zusätzliche Tonhöhen enthalten. Betrachten wir das als Vielfache einer beliebigen Grundfrequenz. Da es gedanklich einfacher ist, höhere Töne mit größeren Zahlen zu verbinden, als mit kleineren Saitenlängen, arbeiten wir mit Frequenzen. (Will man mit Saitenverhältnissen arbeiten, braucht man nur den Kehrwert des Frequenzverhältnisses zu bestimmen.)

f_0, $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$, $6f_0$,.... bzw. L, L/2, L/3, L/4, L/5, L/6,...

Von einigen Obertönen wissen wir bereits, dass sie keine neuen Informationen enthalten, da sie nur Oktaven darstellen: $2f_0$ ist der selbe Ton wie f_0, allerdings höher, $4f_0$ als doppeltes von $2f_0$ ebenfalls. $6f_0$ ist das doppelte von $3f_0$. Wenn wir die uninteressanten Vielfachen weglassen, gelangen wir zur Zahlenliste der Frequenzvielfachen

1, 2, 3, 5

1 steht für den Grundton (Prim) selbst, 2 für die Oktav. Aber welche Töne entsprechen den Zahlen 3 und 5?
Sie klingen viel höher als die beiden ersten. Da wir aber immer um Oktaven nach oben oder unten verschieben können, bringen wir die Tonhöhe in die Nähe der Zahl 1:

3 klingt so wie die Oktav drunter, nämlich 3/2. Wir erhalten also einen Ton zwischen der Prim und

der Oktav! Wir nennen ihn aus rein historischen Gründen Quint.
5 ist soviel wie 5/2, das ist immer noch über 2, also nehmen wir 5/4 und erhalten einen Ton zwischen Prim und Quint. Wiederum aus historischen Gründen nennen wir ihn eine Terz.

Schreiben wir das geordnet an, erhalten wir eine Folge von 4 Tönen. Zur genauen Kennzeichnung geben wir nur die Verhältniszahl an. Die Zahl 3/2 bedeutet dann ein Frequenzverhältnis Grundtonfrequenz : Quintfrequenz = 1 : 3/2

Tonnummer	Prim		Terz		Quint			Oktav
Verhältnis	1		5/4		3/2			2

Nach Wichtigkeit geordnet, da höhere Teiltöne schwächer klingen:

Die Oktav ist das wesentlichste Intervall.
Die Quint ist das zweitwichtigste Intervall.
Die Terz das drittwichtigste.

Wir wollen nun versuchen, weitere Töne in diese Tonleiter einzubauen. Da es dabei aber willkürliche Entscheidungen zu treffen gilt, folgen einzelne Unterkapitel.

Die reine Stimmung

Beziehen wir uns auch weiterhin auf die Obertonfolge. Welche Verhältnisse treten hier noch auf (Wir bleiben aber immer bei kleinen Zahlen!)?

Zwischen drittem und zweitem Oberton hören wir ein Intervall von 4/3. Dieses Intervall (diesen Ton) nennen wir Quart. Dieser Ton tritt zwar in der Obertonreihe selbst nie auf (der Nenner ist keine Zweierpotenz), doch passt er gut ins Bild, da wir auch sagen können, dass wir von der Oktav eine Quint nach unten gehen, womit sich ebenfalls genau dieses Verhältnis 2 / (3/2) = 4/3 ergibt.

Das zweite Verhältnis ist 5/3. Nennen wir es Sext.

Nun passen wir diese Töne in unsere Liste ein:

Tonnummer	Prim		Terz	Quart	Quint	Sext		Oktav
Verhältnis	1		5/4	4/3	3/2	5/3		2

Nun habe wir bereits 6 Töne gefunden.
Wie klingen diese Intervalle: Oktav und Quint passen sehr gut zusammen, Terz und Sext nicht mehr ganz so gut, aber doch. Diese Tatsache führte bereits vor vielen Jahrhunderten Pythagoras auf die Idee, dass der Unterschied zwischen Konsonanz und Dissonanz seine Ursache im Zahlenwert des Verhältnisses hat: Sind Zähler und Nenner klein, klingt es konsonant, sonst dissonant. Damit wurde für die alten Griechen die Musik zu einer mathematischen Disziplin!

In unserer Liste klaffen zwei Lücken: irgendwie würde sich da jeweils noch ein Ton ausgehen können, doch welche Verhältnisse sollen wir nehmen? Die 'einfachen kleinen' Zahlen haben wir bereits verbraucht.

Wir müssen uns also willkürlich für eine Strategie entscheiden, diese Töne zu finden.

Bleiben wir bei unserer Idee, die Oktav und die Quint wären die wichtigsten Intervalle, so können wir uns fragen, welcher Ton eine Quint über der Quint liegt. Sein Verhältnis wäre damit 3/2 * 3/2, also 9/4. Da diese Zahl größer als 2 ist, gehen wir um eine Oktav nach unten und gelangen zu 9/8. Dieser Wert liegt erfreulicherweise zwischen Prim und Terz!

Weiters können wir fragen, welcher Ton eine Quint über unserer bereits gefundenen Terz liegt: Wir berechnen 5/4 * 3/2 = 15/8, das liegt passend zwischen Sext und Oktav.

Wir haben nun eine Folge von 8 Tönen gefunden, mit denen sich (mit Hinzunahme all ihrer Oktaven) wunderbar Musik machen lässt!

Die Skala der reinen Stimmung:

Tonnummer	**Prim**	**Sekund**	**Terz**	**Quart**	**Quint**	**Sext**	**Sept**	**Oktav**
Verhältnis	**1**	**9/8**	**5/4**	**4/3**	**3/2**	**5/3**	**15/8**	**2**

Zum Vergleich listen wir diese Werte als Dezimalzahlen auf, sowie die entsprechenden Frequenzen, wobei wir den Ton auf der Sext mit 440 Hertz festlegen.

Tonnummer	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Sept	Oktav
Verhältnis	1.0000	1.1250	1.2500	1.3333	1.5000	1.6667	1.8750	2.0000
Frequenz / Hz	264	297	330	352	396	440	495	528

Wir bauen ein Monochord

Wenn wir eine Saite über ein Brett spannen, können wir eine primitive Gitarre basteln, die rein gestimmt ist (warum wir nur eine Saite verwenden, wird uns bald klar werden). Doch wo sollen wir die Bundstäbchen montieren?

Die schwingende Länge muss im Verhältnis zur ganzen Saitenlänge genau unsere berechneten Werte haben. Nehmen wir als Gesamtlänge die Standardmensur einer klassischen Gitarre von 64.8 cm, so müssen die Bünde folgende Abstände vom Steg haben:

Tonnummer	1=Sattel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Abstand / cm	64.8	57.6	51.8	48.6	43.2	38.9	34.6	32.4	28.8	25.9	24.3	21.6	19.4

Vergleiche mit einer echten Gitarre – sind die Werte irgendwie richtig? Warum hat Deine Gitarre noch weitere Bünde?

Bemerkung: Beim Bau eines realen Instrumentes müssen die Werte ein wenig vergrößert werden, da eine reale Saite durch ihre Dicke und Steifigkeit nicht genau am Fixierungspunkt zu schwingen beginnen kann, sondern um etwa 1 bis 2 mm davon entfernt. E-Gitarren, die besonders steife Stahlsaiten besitzen, haben deshalb verschiebbare Stegteile in der Brücke, die auch beim Wechsel zu Saiten eines anderen Herstellers bzw. einer anderen Stärke neu justiert werden müssen.

Wie wärs mit einer rein gestimmten Gitarre?

Hier hätten wir eine rein gestimmte Saite (denken wir an die tiefe E) und montieren eine zweite Saite (A) im Quartabstand dazu. Die tiefen Töne der A-Saite können wir auch auf der E-Saite spielen.

Die Tonnummern wären:

```
A: 1=4  2=5  3=6  4=7  5=8  6=9 ....
E:  1    2    3    4    5    6   7   8 ...
```

Eine ganz wichtige Forderung ist klarerweise die, dass die gleichen Tonnummern tatsächlich gleichen Tönen (Intervallen) entsprechen.

z.B. Ton 5:
Er ist einmal die Quint zum Grundton der tiefen Saite, also Verhältnis 3/2
gleichzeitig die Sekund der um eine Quart höher gestimmten zweiten Saite, also 4/3*9/8 was ebenfalls 3/2 ergibt. Es passt!

z.B. Ton 7:
Die Sept auf der tiefen Saite entspricht 15/8 = 1.875
Andererseits die Quart auf der höheren Saite: 4/3*4/3 = 16/9 = 1.777777
Wir stellen mit Schrecken fest, dass es sich hier um zwei unterschiedliche Töne handelt!

Wie können wir das Problem lösen?

1.) Wir verändern die Verhältniszahlen unserer reinen Tonleiter, um Übereinstimmung zu erzielen. Damit zerstören wir aber die so mühsam erzielte wohlklingende Ordnung der Töne und würden eine andere Tonleiter erhalten
2.) Wir fügen zusätzliche Töne in die Skala ein, wie etwa das Intervall 16/9. Würden diese neuen Töne nicht weitere solche Probleme erzeugen?
3.) Wir verwenden keine Bundstäbchen, die über die ganze Halsbreite laufen, sondern verpassen jeder Saite eigene schmale Bundstäbchen, die nicht bis zur Nachbarsaite reichen. Solche Instrumente gibt es tatsächlich! (Die genaue Lage der einzelnen Bundpositionen zu berechnen können wir mit einem kleinen Python-Programm durchführen. Wir warten damit aber, bis wir auch die Halbtöne in unsere Tonleitern aufnehmen)

Beachte: Wenn Du Deine Gitarre stimmst, dann kannst Du das entweder durch Vergleich mit der Tonhöhe einer Nachbarsaite tun, oder professionell mithilfe der Schwebung von Flagioletts. Überlege, ob eine dieser Methoden eine reine Quarten-/Terzstimmung ergibt!

Wodurch ist eigentlich die Misere entstanden: wir wollten die gleiche Folge von Intervallen von einem anderen Grundton aus starten und diese Folge sollte die selben Töne wie ursprünglich gehabt darstellen.
Es geht also um folgendes Problem: wie verhalten sich die Intervalle, wenn wir den Grundton ändern?

Dazu wird es praktisch, die Töne mit anderen Symbolen zu bezeichnen wie die Intervalle. Traditionell verwenden wir die Namen C D E F G A H.

Ton	C	D	E	F	G	A	H	C'	D'	E'	F'	G'	A'	H'
Verhältnis	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2	9/4	5/2	8/3	3	10/3	15/4

Wir haben uns überlegt, dass die Quinten besonders wesentlich sind, und dem Intervall 3/2 entsprechen sollten. Kontrollieren wir das einmal!

Töne	C-G	D-A	E-H	F-C'	G-D'	A-E'	H-F'
Quint	3/2	40/27	3/2	3/2	3/2	3/2	64/45
	1.5000	1.4815	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.4222

Wie wir sehen, stimmt das Verhältnis nicht immer!

1.) D-A ist falsch, das D ist etwas zu hoch.
2.) H-F' ist sehr falsch.

Das Problem mit dem D könnten wir vielleicht beheben, wenn wir das D etwas nach oben verstimmen. Andererseits würde ein verändertes D die korrekte Quint G-D um genau diesen Wert verändern und falsch machen. Dieses Problem scheint **unlösbar**! (Ausblick: vielleicht ist gar nicht das D schuld, sondern das A. Wie haben wir dieses konstruiert? Mithilfe der Terz. Vielleicht ist in Wirklichkeit die Terz der Übeltäter? Wir sollten die Terzen kontrollieren!)

Das H-Problem können wir hier nicht lösen. Wie Du weißt, bräuchten wir einen weiteren Ton (das F#), bzw. das Intervall namens 'verminderte Quint'.

Kontrollieren wir nun die Terzen!

Töne	C-E	D-F	E-G	F-A	G-H	A-C'	H-D'
Terz	5/4	32/27	6/5	5/4	5/4	6/5	6/5
	1.2500	1.1852	1.2000	1.2500	1.2500	1.2000	1.2000

Wir erhalten 3 Werte:
1.) 5/4 - die 'große Terz', genau wie erwartet
2.) 6/5 - die 'kleine Terz'
3.) Ein Intervall, das noch etwas kleiner als die kleine Terz ist!

Wichtige Überlegung: Wir sehen: Quint = kleine Terz + eine große Terz!

Kontrollieren wir noch die Sekunden!

Töne	C-D	D-E	E-F	F-G	G-A	A-H	H-C
Sekund	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15
	1.1250	1.1111	1.0667	1.1250	1.1111	1.1250	1.0667

Wiederum 3 Werte:
1.) 9/8 - der erwartete Wert, ein Ganztonschritt (etwa C-D)

2.) 10/9 - ein etwas kleinerer Ganztonschritt (etwa D-E)
3.) 16/15 - ein Halbtonschritt (etwa E-F)

Der Unterschied (das Intervall) zwischen diesen beiden Ganztönen = 9/8 / 10/9 = 81/80 nennt man SYNTONISCHES KOMMA.

Wichtige Überlegung: kleine Terz = Ganzton + ein Halbtonschritt,
große Terz = großer Ganzton + kleiner Ganzton

Sollten weiters nicht zwei Halbtöne einen Ganzton ergeben? Aber 16/15*16/15 = 256/225 = 1.1378, und dieses Intervall kommt überhaupt nicht vor! Es ist etwas größer als der große Ganztonschritt, also ist ein Halbton der reinen Stimmung größer als ein halber Ganzton.

Übung: Dreiklänge
Auf welchen Stufen finden wir Dur-, Molldreiklänge? Welche klingen rein, welche nicht? Sind die unsauberen Harmonien 'reparierbar'?

Schlussfolgerung:
Wir haben versucht, eine möglichst 'natürliche' Tonleiter zu entwickeln, indem wir nur die Intervalle Oktav, Quint und Terz aus der Obertonfolge verwendet haben.
Akkorde klingen vom Grundton und einigen anderen (G) aus sehr gut, von anderen (D) wiederum schlecht.
Das Problem der unreinen Akkorde auf anderen Stufen ist aber nicht lösbar.
Es ist NICHT MÖGLICH, gleichzeitig alle Quinten und alle Terzen der Tonleiter rein zu erhalten!

Blechbläser befassen sich intensiv mit reinen Intervallen – alles, was sie durch Veränderung der Lippenspannung oder Überblasen erzeugen, sind Teile der Obertonreihe ('Naturtöne')

Die pythagoräische Stimmung

Ein Hauptübel der reinen Stimmung ist das Vorliegen mehrerer Versionen von Intervallen, denke etwa an die unterschiedlichen Sekunden und die seltsame dritte Terz.

Pythagoras entwickelte eine Skala, die diese Unschönheiten vermied. Auch er sah Oktav und Quint als die zentralen Intervalle an, und bemühte sich, alle Töne nur mithilfe dieser beiden Intervalle zu konstruieren.

Er ging so vor: Man nehme einen Grundton (1) und gehe eine Quint (3/2) nach oben. Von diesem Ton aus geht man wiederum eine Quint nach oben (9/4) . Da man hier die Oktav übersteigt, reduziert man nach unten (und erhält 9/8). Wir hätten auch sagen können, wir gehen eine Quint hinauf und eine Quart hinunter.

Welche Töne sind das? Natürlich genau C,G,D der reinen Stimmung! Kein Wunder – schließlich hatten wir dort genauso konstruiert. Allerdings war das Auffinden des D nicht mehr so 'natürlich' wie die Intervalle der Obertonfolge.

Pythagoras trieb diese Vorschrift nun weiter, bis alle nötigen Töne erzeugt sind:

C	1	
G	3/2	

F	4/3	
D	3/2*3/2 = 9/4 = 9/8	Quint über G
A	9/8*3/2 = 27/16	Quint über D
E	27/16*3/2 = 81/32 = 81/64	Quint über A
H	81/64*3/2 = 243/128	Quint über E

Wir gelangen zur **Pythagoräischen Stimmung**

Tonnummer	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Sept	Oktav
Verhältnis	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Verhältnis rein	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Wir bekommen drei Intervalle, die anders sind als in der reinen Stimmung!
Speziell die Terz macht Kopfzerbrechen – wir hatten uns doch darauf geeinigt, dass sie besonders wichtig ist. Und in dieser Stimmung ist sie nicht rein, sondern etwas zu groß!
Berechnen wir ihren Unterschied zur reinen Terz, erhalten wir wieder das SYNTONISCHE KOMMA!

Klangbeispiele:
Die pythagoräische Terz ist besonders in den Dreiklängen auf der 1., 4. und 5. Stufe auffällig rauh.

Mathematische Fortsetzung:

Könnten wir das Bildungsprinzip von Pythagoras nicht weitertreiben? Und neue Töne erzeugen? Wir könnten tatsächlich, und dabei die bekannten Halbtöne erfinden!

F#	729/512	
C#	2187/2048	
G#	6561/4096	
D#	19683/16384	
A#	59049/32768	
E#	177147/131072	
H#	531441/524288	1.0136

Dieses H# ist merkwürdig. Eigentlich hätten wir wieder zum C finden sollen, das ja einen Halbton über dem H liegt. Was ist geschehen? Wir sind zu hoch! Und sollte das E# nicht gleich unserem F sein?

Das Intervall H# zu C, 531441/524288 = 3^12/2^19 heißt PYTHAGORÄISCHES KOMMA. Es stellt den 'Fehler' dar, um den man das zyklische Schließen der Tonleiter versäumt. Oder: geht man 12 Quinten aufwärts und dann 7 Oktaven abwärts, gelangt man nicht zum Ausgangston, sondern zu einem etwas höheren!

Es zeigt sich deutlich: auch diese Skala hat Mängel.

Könnte man prinzipiell so lange weitermachen, bis man irgendwann wieder ein C trifft? Mathematisch gesehen müsste eine Potenz von 3/2 einer Potenz von 2 gleich sein. Das ist aber offensichtlich UNMÖGLICH. Es ist also aussichtslos, eine zyklische Skala zu finden, die sich nur auf Quinten stützt! Wir erkennen jetzt, dass das Finden von Tonleitern ein schwieriges Unterfangen ist, da NIEMALS alle 'wichtigen' Intervalle rein sein können! Liegt das an mathematischem Unvermögen? Nein – es ist eine Eigenschaft der Natur.

Forschung:

Bilde wie oben Tabellen, in denen Du alle in der pythagoreischen Stimmung auftretenden Quinten, Terzen und Sekunden bestimmst – Ist die Situation hier besser als bei der reinen Stimmung?
(Die Töne über dem H können wir außer Acht lassen)

Töne	C-G	D-A	E-H	F-C'	G-D'	A-E'	H-F'
Quint							
	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.4047

Töne	C-E	D-F	E-G	F-A	G-H	A-C'	H-D'
Terz							
	1.2656	1.852	1.852	1.2656	1.2656	1.852	1.2656

Töne	C-D	D-E	E-F	F-G	G-A	A-H	H-C
Sekund							
	1.1250	1.1250	1.0535	1.1250	1.1250	1.1250	1.0535

Die Situation ist deutlich besser! Es gibt eine einzige Quint (klar nach Konstruktion), eine große, eine kleine Terz, sowie einen Ganztonschritt und einen Halbtonschritt.
Allerdings ist der Halbton auch hier kein halber Ganzton. Er ist hier im Gegensatz zur reinen Stimmung KLEINER!

Übung: Wie steht es mit pythagoräisch gestimmten Gitarren?

Nachsatz: Da der 'Fehler' der Töne von C bis H# zunimmt, könnte man symmetrisch arbeiten: wir konstruieren einmal von C aufwärts und stoppen bei F#. Dann arbeiten wir von C hinunter, bis wir vor dem F# stoppen (welches Intervall liegt zwischen diesen beiden F#?)

Idee:

Wenn wir das Bauprinzip dieser Skala gut finden, könnten wir einen Kompromiss schließen: Wir verzichten auf reine Quinten und verteilen das Komma auf die einzelnen Töne der Skala – Wir gehen also nicht genau eine Quint aufwärts, sondern eine Quint minus einem Zwölftelkomma. Dies führt zu einer geschlossenen Tonleiter.
Zusatzfrage: Werden dadurch die Terzen besser oder noch schlechter?

Die mitteltönige Stimmung

Die pythagoräische Stimmung hat den Nachteil, dass ihre Terz, die aus 4 Quinten entstand (CGDAE) verglichen mit der reinen Terz um ein syntonisches Komma zu groß ist. Besonders bei mehrstimmiger Musik ist das ein Nachteil. Dieses Problem ist nicht behebbar, wenn man an reinen Quinten festhält.

Ein Weg, die Reinheit der Terz zu erzwingen besteht darin, die Quint zu verkleinern. Man hat dann zwar falsche Quinten, doch verteilt sich der Komma-Fehler auf vier Intervalle und wird kleiner. Können wir hoffen, dass der Fehler von einem Viertelkomma 'unhörbar klein' ist?

Es muss also die Quintenfolge CGDAE vermindert um 2 Oktaven auf dem selben Ton enden wie ein reines CE.

$q^4/4 = 5/4$, d.h. $q^4=5$. Die neue Quint ist demnach die vierte Wurzel aus 5, bzw. 1.4953 statt 1.5000.

In früherer Zeit stellte sich aber gleichzeitig ein großes Problem: ohne Frequenzmessgerät (19. Jhd) und präzise Uhr ist die Stimmung einer solchen Quint sehr schwierig. Die Musiker mussten mit Regeln wie "stimme eine reine Quint, vermindere sie sodann auf ... Schwebungen pro Sekunde" (Zeitmessungen waren erst mit dem Einsatz des Metronom halbwegs genau, das war zu Beethovens Zeit). (Eine Oktav drüber ist die Schwebungszahl doppelt so groß)
Es ist erstaunlich zu hören, dass Bach zum Stimmen eines Cembalos nie mehr als 15 Minuten benötigte!

Wenn wir nun die Oktav, die reine Terz und die neue Quint zugrunde legen, konstruieren wir:

C als Grundton, E als reine Terz, G als die neue Quint.
D entsteht durch zwei neue Quinten, Intervall 1.1180 statt der reinen 1.1250.
F als neue Quint unter der Oktav, 1.3375 statt 1.3333
A als neue Quint über dem D, 1.6719 statt reiner 1.6667 oder pyth. 1.6875.
H als neue Quint über E, 1.8692.

Wir erhalten eine Skala, die nur wenig reine Intervalle besitzt!

Die Mitteltönige Stimmung

Tonnummer	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Sept	Oktav
Verhältnis	1	1.1180	1.2500	1.3375	1.4953	1.6719	1.8692	2
Verhältnis rein	1	1.2500	1.2500	1.3333	1.5000	1.6667	1.8750	2
Verhältnis pyth.	1	1.2500	1.2656	1.3333	1.5000	1.6875	1.8984	2

Die Intervalle:

Übung: erstelle wie oben die Übersichtstabellen

Töne	C-G	D-A	E-H	F-C'	G-D'	A-E'	H-F'
Quint	1.1953						

Töne	C-E	D-F	E-G	F-A	G-H	A-C'	H-D'
Terz	1.2500	1.1963					

Töne	C-D	D-E	E-F	F-G	G-A	A-H	H-C
Sekund	1.1180		1.0700				

Die entscheidende Frage ist nun wieder der tatsächliche Klang dieser Tonleiter.

Der Dreiklang auf C klingt trotz leicht verstimmter Quint sehr gut, fast rein, jedenfalls besser als pythagoräisch!
Genauso erfreulich klingen die Dreiklänge auf F und G.
Auch der Mollakkord auf D ist, ganz im Unterschied zum pythagoräischen Fall, gut.

Die Inspektion der Sekunden zeigt: es gibt nur zwei Werte, 1.1180 und 1.0700.

Diese Stimmung scheint fast so gut wie rein zu klingen, und so wenige Intervalltypen wie pythagoräisch zu benötigen. Ein Erfolg auf der ganzen Linie?

Nicht ganz – Zwei Halbtonschritte ergeben leider keinen Ganztonschritt.
$1.0700^2 = 1.1449$, das ist immer noch größer als 1.1180.

Schließt sich der Quintenzirkel in dieser Stimmung? Sind also 12 Quinten gleich 8 Oktaven?
12 mitteltönige Quinten = $q^{12} = (q^4)^3 = 5^3 = 125$
7 Oktaven = $2^7 = 128$
Wiederum ist es nicht möglich, den Zirkel zu schließen. Während die pythagoräische Quint etwas zu groß ist, um dieses Ziel zu erreichen, ist die mitteltönige etwas zu **klein**. Das Fehlerintervall ist 128/125.

Jedenfalls: Diese Stimmung war historisch ein großer Erfolg und hielt sich viele Jahrhunderte. Nicht alle ihre Dreiklänge klingen gleich gut, doch erlaubt sie durchaus ein Transponieren und Modulieren in andere Tonarten!

Die gleichschwebende (gleichstufige) Stimmung

Wie groß sollte die Quint sein, damit sich der Zirkel schließt?
Wie soeben überlegt muss $q^{12} = 128$ gelten. Und die 12. Wurzel aus 128 ist **1.4938**

Für die Quart bekommen wir dann ein Intervall von 2/q = 1.3348.

Das Intervall zwischen Quart und Quint ist ein Ganzton mit 1.1225.
Oder = q/ 2/q. Vereinfacht man das, kommt man auf die 6. Wurzel aus 2.

Der Halbtonschritt sollte die Hälfte des Ganztons sein, also in Intervallen gesprochen die Wurzel daraus.

Folgerung: jeder Halbtonschritt muss dem Intervall $\sqrt[12]{2}$ entsprechen.

Anders überlegt: Wir zerlegen den Tonraum einer Oktav (Verhältnis 2) in 12 gleiche Intervalle von jeweils $\sqrt[12]{2}$.

Wir erhalten eine Stimmung, in der alle Intervalle unabhängig von der Grundstufe gleichartig sind. Für jeden Intervalltyp (Quint, kleine Terz,...) tritt ein einziger Zahlenwert auf. Auf einem derartig gestimmten Instrument kann man nach Belieben transponieren!

Die gleichschwebende Stimmung

Tonnummer	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Sept	Oktav
Verhältnis	1	1.1225	1.2599	1.3348	1.4983	1.6818	1.8877	2
Verhältnis rein	1	1.2500	1.2500	1.3333	1.5000	1.6667	1.8750	2
Verhältnis pyth.	1	1.2500	1.2656	1.3333	1.5000	1.6875	1.8984	2
Verhältnis mitteltönig	1	1.1180	1.2500	1.3375	1.4953	1.6719	1.8692	2

So einfach uns diese Rechnung heute scheint, war sie historisch sehr kompliziert. Wie sollte man auch ohne Frequenzmessgerät ein Instrument derart stimmen?

Vorteil der gleichschwebenden Stimmung:

- es kann auf jede Stufe transponiert werden, alle Modulationen sind möglich

Nachteil:

- kein einziges Intervall ist rein, allerdings ist der Fehler nie 'störend' bemerkbar.

In vielen Büchern wird diese Stimmung als 'wohltemperiert' bezeichnet. Dies ist falsch. Das berühmte 'wohltemperierte Klavier' Bachs war in einer speziellen Weise, vermutlich ähnlich einer damals verbreiteten Stimmung (=Temperatur) von Kirnberger, eingerichtet. Wenn in der gleichschwebenden Stimmung alle Tonarten gleich klingen – wozu hätte Bach für jede Tonart ein eigenes Beispiel gegeben? Auch das Wort 'Chromatik' gibt einen Hinweis, edeutet es doch 'Farbigkeit'. In der gleichschwebenden Stimmung haben die Tonarten auf Kosten der Transponierbarkeit ihre Farbe verloren. Eher wollte Bach demonstrieren, wie universell sich seine Stimmung einsetzen ließ, auch wenn man unterschiedliche Grundtöne heranzieht.

Die 1975 rekonstruierte vermutliche wohltemperierte Stimmung Bachs ist

Tonnummer	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	H	C
Verhältnis	1	1.0535	1.1190	1.1852	1.2520	1.3333	1.4047	1.4957	1.5803	1.6738	1.7778	1.8781	2
gleichschwebend	1	1.0595	1.1225	1.1892	1.2599	1.3348	1.4142	1.4983	1.5874	1.6818	1.7818	1.8877	2
Verhältnis rein	1		1.2500		1.2500	1.3333		1.5000		1.6667		1.8750	2

Jedes Intervall ist kleiner als in der heute üblichen Stimmung, die Quint ist noch weniger richtig als gleichschwebend! Umso erstaunlicher ist die reine Quart.

Besonders deutlich hörbar wird der Einfluss der Stimmung etwa bei Cembalosonaten von Domenico Scarlatti. Was auf einem üblichen Klavier oft etwas matt wirkt, strahlt auf einem historisch gestimmten Instrument in vielen Klangfarben!

Leider ist von den 'alten' Komponisten meist nicht überliefert, welche Stimmungen sie tatsächlich benutzten, man ist auf Mutmaßungen angewiesen.

Technischer Hinweis:

Um Intervalle exakt anzugeben, verwendet man heute nicht Verhältniszahlen, da diese sehr unanschaulich sind.

Man legt die gleichschwebende Stimmung zu Grunde und bildet Hundertstel-Halbtöne, die man als **Cents** bezeichnet. Das Intervall von einem Cent ist unhörbar klein, erst etwa 4 Cent kann ein geschultes Ohr unterscheiden (Als Tonfolge. Durch Schwebungen eines Akkords natürlich immer). Ein Cent ist also die 1200-te Wurzel aus 2.

Damit haben die Halbtöne der gleichschwebenden Stimmung die Werte 0,100,200,300,400,... Cent.

Zur Umrechnung von Cents in Intervalle kann Dir folgendes Python-Programm dienen:

```
def cent2intervall(c):
    return round(2.0**(c/1200.0),4)
```

Der Aufruf `cent2int(700)` liefert den Wert 1.4983, was dem Intervall der gleichschwebenden Quint entspricht.

Umgekehrt:

```
def intervall2cent(i):
    return 1200.0*math.log(i)/math.log(2.0)
```

Einen Vergleich vieler Stimmungen findest Du auf unserer Schulhomepage www.hib-wien.at, in der Rubrik Aktiv/Unterricht/Physik/Materialien von Prof. Urban.

Falls Du einen modernen digitalen Synthesizer besitzt: Er kann in unterschiedliche Stimmungen versetzt werden, wenn man ihn mit den passenden Cent-Angaben füttert. Konsultiere das Handbuch, wie man diese Einstellungen vornimmt. (Computer-Soundkarten können das heute nicht mehr.)