

SUDOKU - Strategien zur Lösung

1. Naked Single (Eindeutiger Wert)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					1				
2					2				
3									
4			3	4	?		8		
5				5					
6				6					
7					7				
8									
9									

"Es gibt nur einen einzigen Wert, der hier stehen kann".

Sind alle anderen Werte bis auf einen für eine Zelle unmöglich, da sie bereits an anderer Stelle in den beteiligten Bereichen vorkommen, so muss die Zelle diesen einzigen noch möglichen Wert auch unbedingt annehmen.

Im Beispiel:

Spalte E: ? kann nicht 1,2,7 sein

Zeile 4: ? kann nicht 3,4,8 sein

Block Mitte: ? kann nicht 4,5,6 sein

somit muss **E4=9** sein, da dies der einzige noch mögliche Wert ist.

Diese Regel liefert also einen Wert.

2. Hidden Single (Einzig möglicher Ort)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3				1					
4					?				
5					2				
6					3				
7									
8						1			
9									

"Es gibt nur eine einzige Stelle, an der dieser Wert stehen kann."

Kann nur eine einzige Zelle eines Bereichs einen bestimmten Wert annehmen, so **muss** sie es unbedingt auch tun, ganz egal welche Werte sie sonst noch annehmen könnte. Es werden alle anderen Alternativen dieser Zelle ausgeschlossen.

Beispiel: Die Zelle E4 könnte die Werte 1,4,5,6,7,8 und 9 annehmen. Sie ist allerdings die einzige im mittleren Block, für die der Wert 1 möglich ist, also muss **E4=1** sein. Die Alternativen 4,5,6,7,8 und 9 kommen nicht in Frage.

Auch diese Regel liefert ein sofortiges Ergebnis.

Die Regeln 1 und 2 sind die grundlegenden Methoden zur Lösung von Sudoku, sie liefern die Lösungszahl für eine Zelle. Oft erfordert ein 'leichtes' Sudoku nur Kenntnis dieser beiden Regeln.

Die meisten weiteren Strategien dienen dazu, die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten für eine Zelle oder eine Zellgruppe **einzuschränken**, um dann später im weiteren Verlauf der Sudoku-Lösung mit verringerter Anzahl von Alternativen in den Zellen die Regeln 1 und 2 anwenden zu können, und einen endgültigen Wert zu ermitteln.

3. Naked Subset (Eindeutige Teilmenge)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4				1 3 5 8	1 3 4	4 8 9			
5				1 3 6 7 8 9	2 3 5 6 7 9	1 2 3 5 6 7 9			
6				1 3 4	2 3 4 5 7	1 3 4			
7									
8									
9									

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4					5 8	1 3 4			
5					6 7 8 9	2 5 6 7 9	2 5 6 7 9		
6						1 3 4	2 5 7	1 3 4	
7									
8									
9									

Naked Triple: Kommen in drei Zellen eines Bereichs ausschließlich die drei gleichen Werte vor, dann müssen sich diese drei Zellen diese drei Werte teilen. Diese Werte können also in allen übrigen Zellen des Bereichs entfernt werden. Naked Subsets schränken also die Werte in **allen übrigen** Zellen des Bereiches ein. Analog spricht man von Naked Pairs bei zwei Zellen mit zwei Werten, Naked Quadruples,...

Im obigen Beispiel wurden die Möglichkeiten in den Zellen **außerhalb** von E4, D6 und F6 reduziert.

Es könnte auch sein, dass in einer der obigen drei Zellen nur zwei dieser drei Werte vorkommen, die Schlussfolgerung ist freilich die gleiche.

4. Hidden Subset (Eindeutige Orte)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4				2 3 5 8	1 4 7 8		3 8 9		
5				3 6 7 8 9	2 3 5 6 7 9	2 5 6 7 9			
6				2 3 5 9 7	2 3 5	1 2 3 4 5 6 8			
7									
8									
9									

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4				2 3 5 8	1 4 7 8		3 8 9		
5				3 6 7 8 9	2 3 5 6 7 9	2 5 6 7 9			
6				2 3 5 9 7	2 3 5	1 2 3 4 5 6 8			
7									
8									
9									

Hidden Pair: Kommen zwei Werte nur in zwei Zellen vor (egal welche anderen Werte noch in diesen erlaubt sind), dann müssen sich diese beiden Zellen diese Werte teilen, da keine andere Zelle sie übernehmen kann. Wir wissen zwar noch nicht, welcher Wert in welcher der beiden Zellen steht, doch wir wissen, dass diese beiden Zellen keine anderen Werte annehmen können. Im obigen Beispiel wurden die Alternativen für E4 und F6 dadurch reduziert. 'Hidden Subset' betrifft also den Inhalt der beiden **betroffenen Zellen selbst**.

Diese Technik lässt sich erweitern auf drei Werte in drei Zellen (hidden triple), vier Werte in vier Zellen usw.

5. Block-Line Interactions (Block-Linien Wechselwirkungen)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				1		2			
2								9	
3				3		4			
4					?				
5					?				
6					?				
7					?				
8					?				
9					?				

Der Block in der Mitte oben muss irgendwo den Wert 9 enthalten. Dies kann aber, wegen der 9 in H2 nur in E1 oder E3 sein, da die Zeile 2 bereits eine 9 enthält.

Somit ist klar, dass die Spalte E den 9er im obersten Block enthält. Wir können die Möglichkeit 9 somit für alle Zellen der Spalte E außerhalb dieses Blocks eliminieren.

Im Beispiel kann kein ? den Wert 9 annehmen.

6. Block-Block Interactions (Block-Block Wechselwirkungen)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			3						
2				4	2	5		9	
3				3 6 7 8	3 6 8 9	1			
4				9	1 5 8	3 4			
5		3							
6				1 2 3 5 8	7	6			
7				?	?				
8				?	?				
9				?	?				

Die markierten Zellen sind die einzigen der beiden oberen Blöcke, die einen 3er enthalten können. Sie müssen es auch tun - entweder D3 und E4 oder E3 und D6 haben diesen Wert 3.

Das bedeutet aber, dass keine der Zellen '?' einen 3er enthalten kann. Wir können die Möglichkeit 3 in D7 bis D9 und E7 bis E9 ausschließen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					1				
2					2				
3							9		
4				?		?			
5				?		?			
6				?		?			
7					3				
8					4				
9		9							

Die markierten Zellen sind die einzigen der beiden Blöcke, die einen 9er enthalten können. In Spalte D und in Spalte F kommt sicher ein 9er vor, entweder im oberen oder unteren Block.

Das bedeutet aber, dass die Spalten D und F ihren 9er nicht im mittleren Block haben.

Wir können die Alternative 9 in allen Zellen '?' streichen.

Mit diesen Techniken 3 bis 6 sind auch 'schwierige' Sudokus in den Griff zu bekommen. Alle weiteren Methoden fallen in die Kategorie 'sehr schwierig' und 'nur für Experten'.

7. Forcing Chains (Auswirkungsketten)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2					3		
2	1 2	7					7		
3									
4									
5	1 2						1 3		
6									
7									
8									
9									

Diese Technik untersucht die Auswirkungen einer möglichen Belegung auf Zellen, die miteinander über einen gemeinsamen Bereich und einen gemeinsamen Wert verknüpft sind und je zwei Alternativen bieten.

Die Annahme $B1 = 2$ führt zu
 -> $A2 = 1$ (gemeinsamer Block)
 -> $A5 = 2$ (gemeinsame Spalte)

Andererseits führt $B1 = 7$ zu
 -> $G1 = 3$ (gemeinsame Zeile)
 -> $G5 = 1$ (gemeinsame Spalte)
 -> $A5 = 2$ (gemeinsame Zeile)

In jedem Fall ist demnach $A5=2$, dieser Wert kann fixiert werden.

Besonders elegant: eine Kette, die geschlossen ist und wieder zur Anfangszelle zurückführt.

Diese Strategie ist ein Sonderfall: sie liefert keine Einschränkungen, sondern ein klares Ergebnis! (Mathematik: ist das Rätsel eindeutig lösbar, MUSS eine der beiden Alternativen (für jede Zelle

kommen nur zwei Werte in Frage) falsch sein. Forcing Chains sind demnach eine sehr mächtige Lösungshilfe.)

8. X-Wing (Crosswing, Kreuzflügel)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		..9	3			2	7		..9
2		?							?
3		?							?
4	9								
5				9					
6								9	
7		?							?
8		..9	5			1	4		..9
9		?							?

Die markierten Zellen seien die einzigen in den Zeilen 1 und 8, die einen 9er enthalten können.

Da jede Zeile einen 9er enthalten muss, ist entweder B1=I8=9 oder B8=I1=9. Auf jeden Fall steht in den Spalten B und I ein Neuner. Da in B und I kein weiterer 9er auftreten darf, kann keine der Zellen '?' einen Neuner enthalten.

9. Swordfish (Schwertfisch)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				4	7	1	6	2	
2	7 9	?	4	?	?	3 8 9	3	1	5
3	1	2	6						
4		3	9					6	1
5				1	3	6			
6			1	5 7 9	?	5 7 9	2	8	3
7		5		8	1	4	7	9	6
8	4		8				1	5	2
9	6 9	1	7	6 9	5	2		3	

Wir haben hier drei Spalten, in denen nur je zwei Zellen Kandidaten für einen speziellen Wert (hier 9) sind, und diese Zellen stehen in genau drei Zeilen. In diesem Fall liegt ein 'Swordfish' vor und wir können ähnlich dem X-Wing schließen.

Entweder steht der 9er in A2, D9 und F6, oder in A9, D6 und F2. In beiden Fällen bedeutet das aber einen 9er den Zeilen 2, 6 und 9. Keine andere Zelle in diesen Zeilen kann daher einen 9er enthalten.

Somit kann die zuvor bestehende Option 9 aus den Zellen '?' entfernt werden.

10. XY-Wing (XY-Flügel)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1 5			1 9		
3							
4							
5		5 9			?		
6							
7							

In drei Zellen, die über gleiche Zeile bzw. Spalte verknüpft sind, stehen zwei (daher der Name XY) von drei gemeinsamen Werten. Durch eine kurze Forcing Chain können wir eine Bedingung für eine vierte, im 'Rechteck' dazu ligende Zelle erhalten.

Angenommen B2=1
dann ist E2=9 und ? kann nicht 9 sein

oder B2=5
dann ist B5=9 und ? kann ebenfalls nicht 9 sein

Auf jeden Fall ist die Alternative 9 aus ? entfernbare

Eine interessante Situation entsteht, wenn nur zwei Blöcke betroffen sind :

	A	B	C	D	E	F	G
1		1 5			1 9		
2							
3	5 9			?	?	?	
4							

Die Folgerung ist wie oben:

Da der 9er entweder in Zeile 3 oder im rechten Block selbst auftritt, kann kein ? 9 sein.

	A	B	C	D	E	F	G
1	?	1 5	?		1 9		
2							
3	5 9						
4							

Auch hier ist die Folgerung analog:

Da der 9er entweder in Zeile 1 oder im linken Block selbst auftritt, kann kein ? 9 sein.

und das ergibt kombiniert

	A	B	C	D	E	F	G
1	?	1 5	?		1		
2						9	
3	5 9			?	?	?	
4							

Kein ? kann den Wert 9 annehmen.

11. XYZ-Wing (XYZ-Flügel)

	A	B	C	D	E	F	G
1		5 9					
2	1 5 9	?	?		1		
3						9	
4							

Hier geht es um drei Alternativen 1,5,9 (daher der Name XYZ).

Falls A2=1, dann ist E2=9 und ? kann nicht 9 sein (Zeile)
 Falls A2=5, dann ist B1=9 und ? kann nicht 9 sein (Block)

Falls A2=9, dann kann ? ohnehin nicht 9 sein (Block)

In jedem Fall ist die Alternative 9 für '?' auszuschließen.

Begriffe:

Wir haben bei der Sammlung der Lösungsstrategien die Wichtigkeit einer ganz präzisen Sprechweise erkannt.

Testmöglichkeit: Du erklärst Deinen Mitschülern, wie Du ein spezielles Sudoku löst - allerdings rein verbal, ohne jemals irgendwo hinzudeuten ("hier oben") oder korrigierend einzugreifen ("ich meinte die Stelle links daneben"). Wenn Deine Mitschüler dann in der Lage sind, Deinen Erklärungen richtig zu folgen, hast Du es geschafft.

<i>Zelle</i>	ein einzelnes Feld
<i>Zeile</i>	waagrecht liegende Zellen (row), enthält alle Zahlen 1..N
<i>Spalte</i>	senkrecht liegende Zellen (column), enthält alle Zahlen 1..N
<i>Block</i>	quadratischer oder rechteckiger Teilbereich, enthält alle Zahlen 1..N
<i>Linie</i>	Zeile oder Spalte
<i>Bereich</i>	Linie oder Block

Programmierung

1. Die Ausgangssituation sollte als normaler Textstring der Länge N^2 vorliegen. Die gegebenen Werte überträgt man in eine Python-Liste. Entweder eindimensional $S[i]$ oder mit Koordinaten $S[y][x]$. Die erste Version ist schneller, die zweite erlaubt einfachere direkte Programmierung von Begriffen wie 'alle in der gleichen Zeile'.
2. Eine zweite Liste soll alle Werte enthalten, die noch möglich sind - also zu Beginn für jede Zelle die Liste $[1, \dots, N]$. Tip: $(N*N)*\text{range}(1, N*N+1)$. Je nach Programm könnte hier aber auch eine Liste von Strings geeignet sein. Eine Funktion soll diese Felder anzeigen können. Hier hilft GUI.
3. Wichtig sind die Begriffe "alle Zellen in der selben Zeile", "alle Zellen im Block dieser Zelle", usw. Eine Hilfsliste soll für jede Zelle eine Liste aller 'befreundeten Zellen' enthalten, also alle Zellen, die in der selben Zeile, Spalte, oder im selben Block liegen. Je nach Programmstruktur genügt eine Liste, oder Du machst getrennte für Zeile, Spalte, Block, Bereich.
4. Grundsätzlich: Arbeitest Du ausschließlich mit der Liste der noch offenen Möglichkeiten und reduzierst so lange, bis jeder ihrer Einträge die Länge 1 hat, oder ergänzt Du die Ausgangssituation so lange um gefundene Werte, bis alle Einträge nicht leer sind, oder machst Du eine kombinierte Version?
5. Führen Deine Lösungsfunktionen ihre Ergebnisse selbst aus (Eintrag in die Listen) oder übergeben sie diese als 'Aufgabe' an eine zentrale update-Funktion?