

Der Pythagoräische Lehrsatz

Babylon: Skizzen auf Tafeln gefunden, 1900-1600 v. Chr., Tabellen mit passenden a,b,c zur Konstruktion.

Ägypten: als Hilfsmittel zur Bestimmung von rechten Winkeln (Schnüre mit Knoten)

China: Als Diagramm auf Gemälden

Pythagoras (560-480 v. Chr.): Satz präzise formuliert 'für ein rechtwinkliges Dreieck gilt...' allerdings kein Beweis übermittelt

Euklid (ca. 300 v.Chr.)

Seine Bücher 'Die Elemente' = sein gesammeltes Wissen über Geometrie, Axiome = mindeste Grundlagen, um mit ihrer Hilfe alles beschreiben und beweisen zu können. Pythagoreischer Lehrsatz mit Beweis (Kathetensatz) UND Umkehrung (Wenn $a^2+b^2=c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig)

Berühmt: der Kathetensatz. Wurde erst nach dem Pythag. Lehrsatz entdeckt!

(Sonderstellung Parallelenpostulat: äquivalent zum pythag. Lehrsatz. Parallelen erlauben die Winkelsumme, Parallelwinkel, Ähnlichkeit)

VORAUSWISSEN

- Winkelsumme im Dreieck
- Ähnlichkeit
- Flächen verhalten sich bei ähnlichen Figuren wie die Quadrate der Seiten
- Fläche des Dreiecks = halbe Fläche des entsprechenden Parallelogramms
- Fläche bei Parallelogramm und Dreieck nur von Grundlinie und zugehöriger Höhe abhängig
- (Peripheriewinkelsatz)

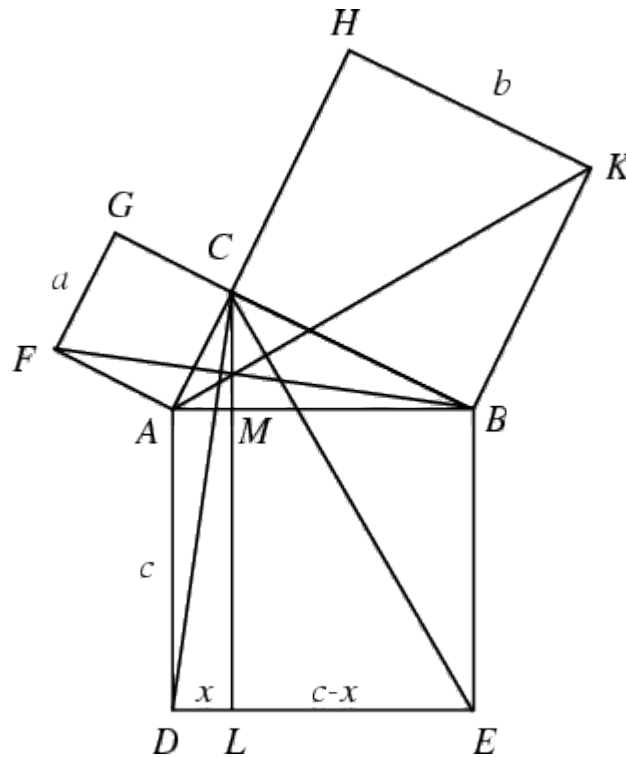
Was ist 'konstruierbar':

- mit Ähnlichkeit alle Teile und Vielfache einer Einheit -> alle rationalen Zahlen (lineare Gleichungen)
- mit Pythag. Lehrsatz alle Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen (quadratische Gleichungen)

Klassische unlösbare Probleme:

- Quadratur des Kreises (Pi ist nicht rational oder eine Quadratwurzel)
- Konstruktion eines Würfels mit doppeltem Inhalt (Orakelspruch zur Abwehr der Pest) (3.Wurzel aus 2 ist nicht rational oder Quadratwurzel)
- Drittelung eines allgemeinen Winkels (Beweis 1837: ist auf eine Gleichung 3. Grades zurückführbar)

1. Standardbeweis (Euklid)



$\triangle FAB = \triangle CAD$ da gleiche Seiten und Winkel

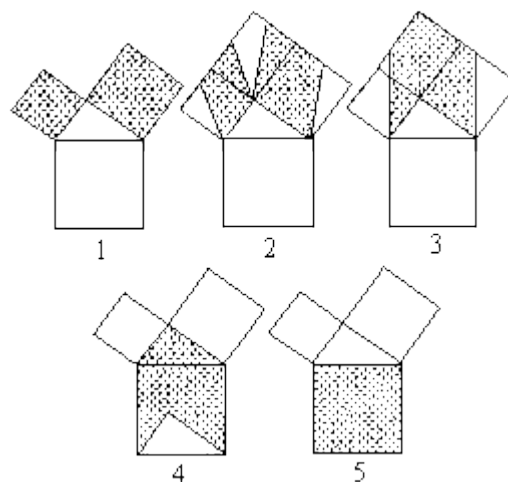
also $2\triangle FAB = 2\triangle CAD$ für das nach unten gedrehte Dreieck

$2\triangle FAB = \square FACG$ und $2\triangle CAD = \square ADLM$ durch Verschiebung mit gleicher Höhe
und somit $\square FACG = \square ADLM$

analog zeigt man $\square BKHC = \square MLEB$

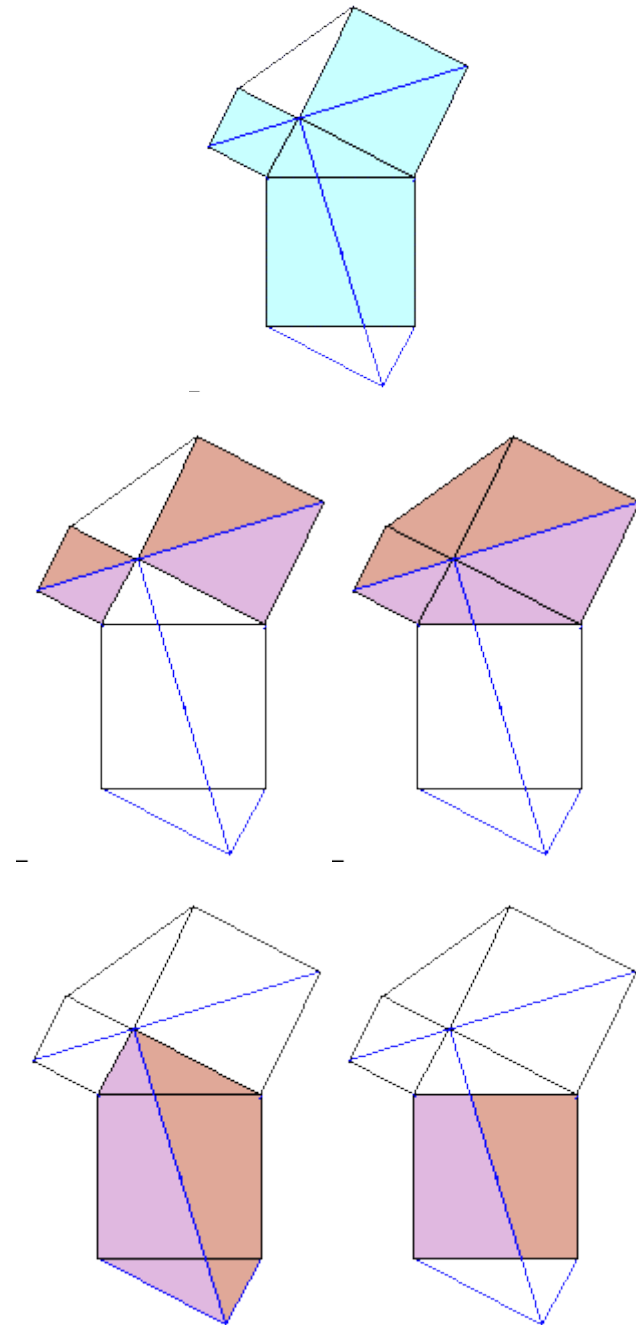
und damit $\square FACG + \square BKHC = \square ADLM + \square MLEB = \square ADEB$

2.) Variation

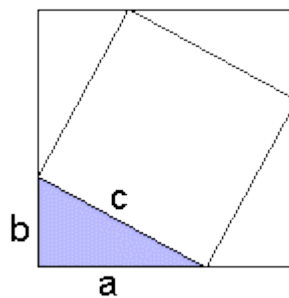


Verschieben von Parallelogrammen

3.) Leonardo Da Vinci

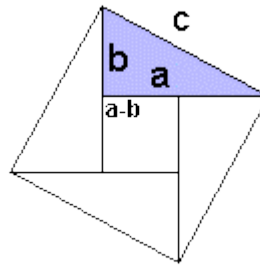


4.) Chinesischer Beweis



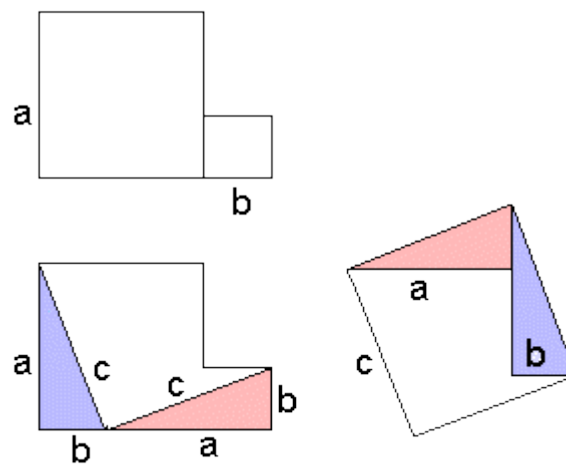
$$(a+b)^2 = 4\Delta + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2$$

5.) Alternativer chinesischer Beweis

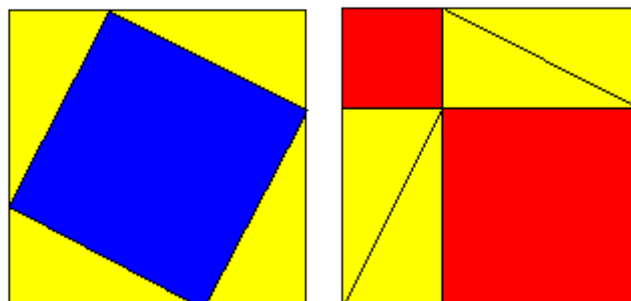


$$c^2 = 4\Delta + (a-b)^2$$

6.) Zerlegung der Quadrate

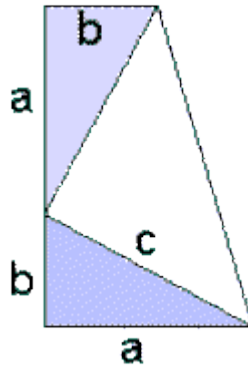


7.) Umlegen ohne binomische Formel



$$c^2 + 4\Delta = a^2 + b^2 + 4\Delta$$

8.) Garfield - Beweis



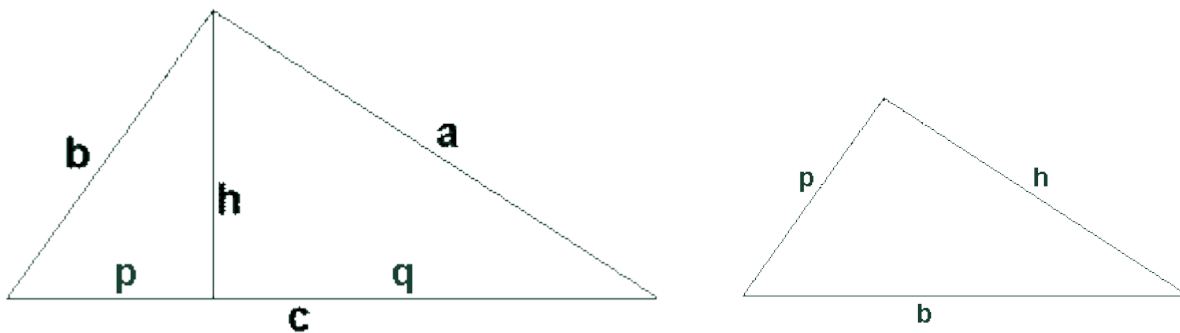
Die Fläche des Trapezes ist gleich der der Summe seiner Einzelteile

$$(a+b)(a+b)/2 = 2 \triangle + c^2/2$$

$$(a^2 + 2ab + b^2)/2 = (2ab + c^2)/2$$

(James Garfield 1876, bevor er Präsident der USA wurde)

9.) Ähnlichkeit mit der Höhe

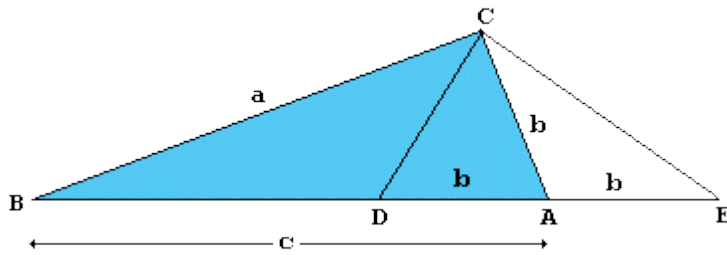


$$b/c = p/b \text{ sowie analog } a/c = q/a$$

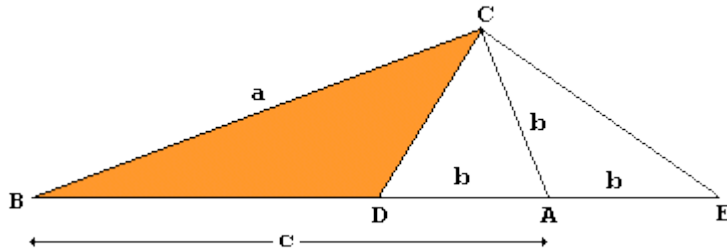
$$\text{also } b^2 = pc \text{ und } a^2 = qc$$

$$\text{und damit } a^2 + b^2 = (q+p)c = c^2$$

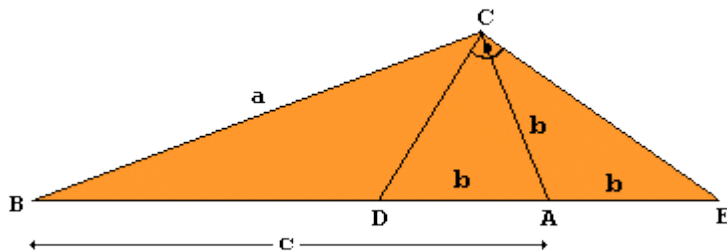
10.) Ähnlichkeit mit Hilfslinien



b wird um A herum aufgetragen



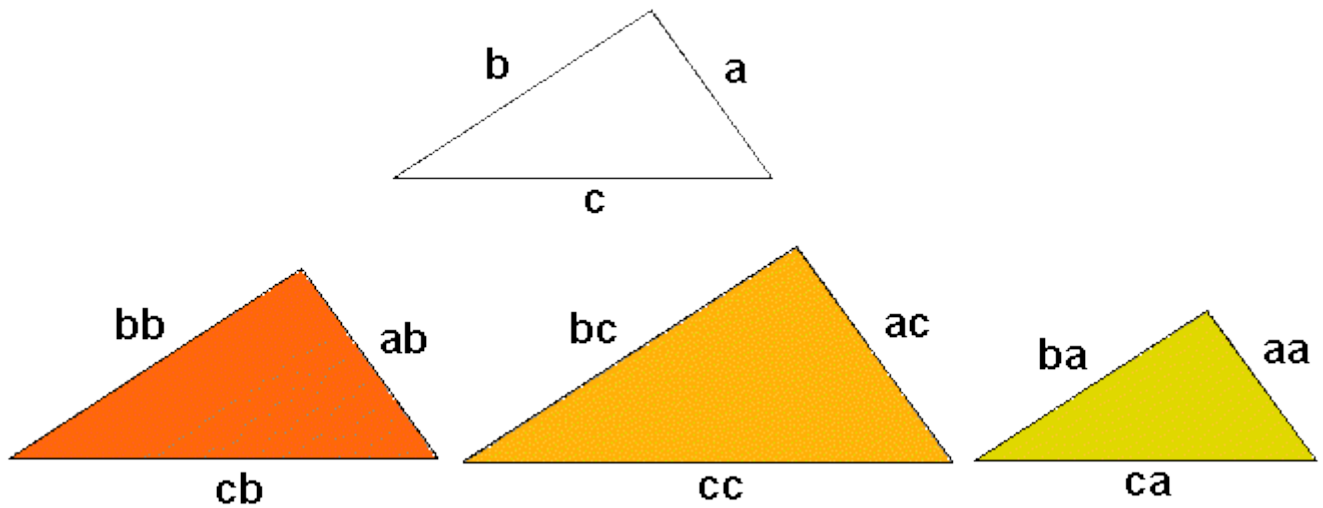
durch Eintragen aller Winkel sieht man,



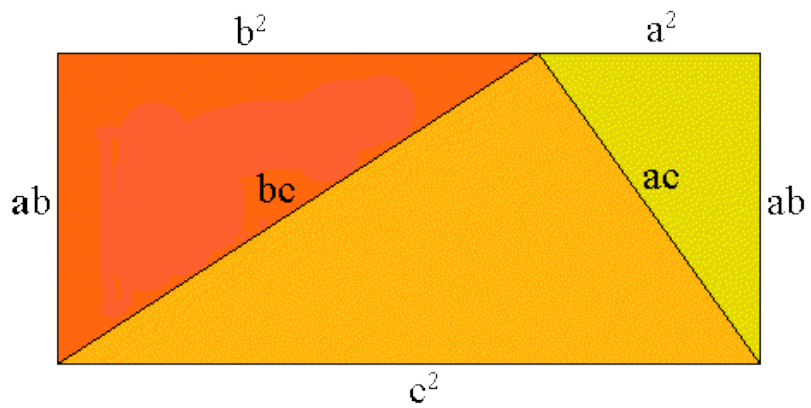
dass die orangenen Dreiecke ähnlich sind.

und damit ist unten $a/(c+b)$ gleich oben $(c-b)/a$, das heißt $a^2 = (c+b)(c-b) = c^2 - b^2$

11.) Beweis ohne Worte



das erste Dreieck ist b mal, das zweite c mal und das dritte a mal so groß wie das Original
diese Dreiecke werden nun zusammengesetzt.



Vergleiche die Grundlinie und ihr Gegenüber.