Kurvendiskussion

Diskutiere die Funktion f(x) - Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Graph

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+\frac{5}{8}$$

Zuerst berechne ich die Ableitungen. Außerdem hebe ich so weit wie möglich heraus, da ich ja nachher von allen Termen die Nullstellen berechnen werde.

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+\frac{5}{8} \qquad f(x) = \frac{1}{8}\cdot(x^3+3x^2-9x+5)$$

$$\partial_x f(x) = \frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{8} \qquad \partial_x f(x) = \frac{3}{8}\cdot(x^2+2x-3)$$

$$\partial_x^2 f(x) = \frac{3}{4}x+\frac{3}{4} \qquad \partial_x^2 f(x) = \frac{3}{4}\cdot(x+1)$$

1.) **Nullstellen** - Wo der Graph die x-Achse schneidet, ist der Funktionswert Null.

Wir lösen also die Gleichung f(x) = 0

Da der Grad des Polynoms 3 ist, müssen wir eine Lösung erraten, eventuell mit einer Wertetabelle. Hier ist es leichter, da die Standardform des Polynoms einfach ist: 1 vor der höchsten Potenz und sonst lauter ganze Zahlen - wir müssen nur die Teiler der Konstanten testen (1,-1,5,-5). Schon mit x=1 haben wir Glück.
Also dividieren wir für die erste Lösung $x_1=1$ das Polynom durch den Linearfaktor (x-1)

```
(x³ + 3x² - 9x + 5):(x-1) = x² + 4x - 5
 x³ -  x²
--------
       4x² - 9x
       4x² - 4x
       --------
            - 5x + 5
            - 5x + 5
            --------
                   0
```

Und nun für die mögliche zweite und dritte Lösung (Grad des Polynoms ist 3) lösen wir die quadratische Gleichung $x^2+4x-5 = 0$

$$x_{2,3} = -2\pm\sqrt{4-(-5)} = -2\pm\sqrt{9} = -2\pm3 \quad \rightarrow \quad x_2=-5,\, x_3=1$$

Damit erhalten wir eine doppelte Nullstelle bei x=1 (und vermuten deshalb einen Extremwert an dieser Stelle) und eine einfache Nullstelle bei x=-5

Ergebnis : $N_{1,2}$(1/0) , N_3(-5/0)

2.) (relative) **Extremwerte** - Wo der Graph lokal maximal oder minimal wird. Hier liegt eine waagrechte Tangente vor, deren Anstieg Null ist. Wir suchen also die Stellen mit Ableitung gleich Null

Wir lösen die Gleichung ∂_xf(x)= 0

Diese lautet $x^2+2x-3 = 0$. $\quad x_{1,2} = -1\pm\sqrt{1-(-3)} = -1\pm\sqrt{4} = -1\pm2 \quad \rightarrow \quad x_1=-3,\, x_2=1$

An den Stellen -3 und 1 können also Extremwerte vorliegen (bei x=1 wissen wir es sogar schon). Wir testen mit der zweiten Ableitung, ob eine Krümmung vorhanden ist:

∂^2_xf(-3)= 3/4(-3+1) = -3/2 <0 und deshalb ein Maximum. Mit f(-3)= 32/8 = 4 H(-3/4)
∂^2_xf(1)= 3/4(1+1) = 3/2 >0 und deshalb ein Minimum. Mit f(1)= 0 T(1/0)

(Bemerkung: wäre hier an einer der Stellen die zweite Ableitung gleich Null, müssten wir weiterdenken - oder eine klitzekleine Wertetabelle machen.)

Ergebnis : H(-3/4) , T(1/0)

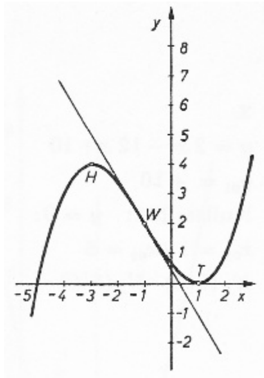
3.) **Wendepunkte** - Wo der Graph die Krümmung wechselt. Hier ändert sich der Anstieg kurzzeitig nicht, die erste Ableitung ist also lokal konstant und somit die zweite Ableitung Null.

Wir lösen die Gleichung $\partial^2{}_x f(x) = 0$

Diese lautet (x+1) = 0, also x = -1. An dieser Stelle ist der Funktionswert f(-1) = 2.

Ergebnis : W(-1/2)

4.) **Graph** der Kurve



5.) Manchmal ist noch die Gleichung der Wendetangente gefragt. (Sie erlaubt ein genaueres Skizzieren des Graphs)

Für eine Gerade benötigen wir entweder 2 Punkte auf ihr (das haben wir hier nicht), oder einen Punkt und einen Richtungsvektor. Der Punkt ist klarerweise der Wendepunkt selbst. Und die Richtung der Tangente im Wendepunkt ist leicht zu finden, da die erste Ableitung ja den Anstieg der Tangente berechnet. Und das 'Anstiegsdreieck' zeigt einen passenden Richtungsvektor.

Der Anstieg an dieser Stelle ist k = ∂_xf(-1) = -3/2, der Punkt lautet (-1/2). Demnach

$$t_x : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{oder hübscher} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , s \in \mathbb{R}$$

Falls Dein Lehrer diese Gerade lieber in Form einer Funktionsgleichung sehen möchte:
Den Anstieg k kennen wir ja bereits und als Punkt setzen wir W ein, da die Tangente ihn enthält

$t_w : y = kx + d$ wir wissen $k = -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + d$ für x und y setzen wir den Wendepunkt ein

$2 = -\frac{3}{2}(-1) + d \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = d$ und wir setzen ein

$t_w : y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Tipps zur effizienten Arbeit:

- zuerst alle nötigen Ableitungen berechnen
- wenn möglich herausheben und faktorisieren, um das Gleichungslösen zu erleichtern
- wenn Du Dir unsicher bist - mach eine Wertetabelle und zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem. So kannst Du (zumindest ungefähr) schon vorher sehen, welche Ergebnisse Du durch die Rechnung erhalten musst.

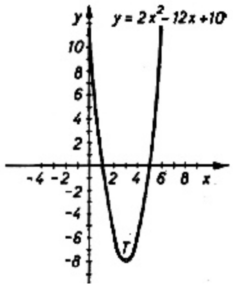
Nun zum Üben einige Angaben mit Lösungsweg

Die Aufgaben sind im 'alten schulischen Stil' geschrieben:
- Statt f(x) wird oft y geschrieben (wegen y=f(x) des Graphen)
- Erste Ableitung als y' oder f '(x), zweite Ableitung als y" oder f "(x)   (Zeichen auf der Schreibmaschine)

Die Ergebnisse und Rechengänge sind selbstverständlich gleich...

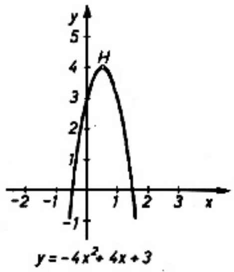
$$f(x) = 2x^2 - 12x + 10$$

$y = 2x^2 - 12x + 10$ $y_{01} = +10$ Nullstellen: $y = 0$: $x_{01} = 1 \vee x_{02} = 5$ $N_1(1\|0)$ $N_2(5\|0)$	$y' = 4x - 12$ $y' = 0: \; x_{11} = 3$ $f''(x_{11}) = 4 > 0 \Rightarrow T$ $T(3\|-8)$	$y'' = 4$ Keine Wendest.



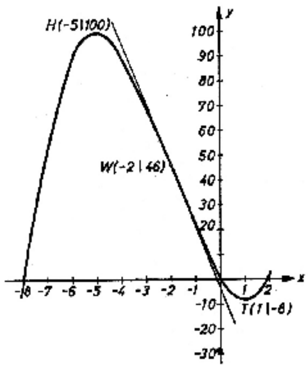
$$f(x) = 3 + 4x - 4x^2$$

$y = -4x^2 + 4x + 3$ $y_{01} = 3$ Nullstellen: $y = 0$: $x_{01} = -\frac{1}{2} \vee x_{02} = \frac{3}{2}$ $N_1\left(-\frac{1}{2}\middle\|0\right)$ $N_2\left(\frac{3}{2}\middle\|0\right)$	$y' = -8x + 4$ $y' = 0: x_{11} = \frac{1}{2}$ $f''(x_{11}) = -8 < 0 \Rightarrow H$ $H\left(\frac{1}{2}\middle\|4\right)$	$y'' = -8$ Keine Wendest.



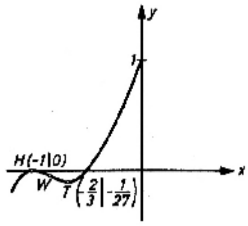
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$y = x^3 + 6x^2 - 15x$ $= x(x^2 + 6x^2 - 15)$ $y = 0: x_{01} = 0$ $x^2 + 6x - 15 = 0$ $x_{02} = -3 + 2\sqrt{6}$ $= 1{,}89898$ $x_{03} = -3 - 2\sqrt{6}$ $= -7{,}89898$ $N_1(0\|0)$; $N_2(+1{,}89898\|0)$ $N_3(-7{,}89898\|0)$	$y' = 3x^2 + 12x - 15$ $= 3(x^2 + 4x - 5)$ $= 3(x+5)(x-1)$ $y' = 0; x_{11} = -5, x_{12} = 1$ $f''(x_{11}) = -18 < 0 \Rightarrow H$ $f''(x_{12}) = 18 > 0 \Rightarrow T$ $H(-5\|100)$ $T(1\|-8)$	$y'' = 6x + 12$ $= 6(x+2)$ $y'' = 0: \; x_{21} = -2$ $W(-2\|46; \; -27)$ W_{tg} $y = -27x - 6$



$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$$

$y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ $y = 0; \quad x_{01/02} = -1$ $x_{03} = -\frac{1}{2}$ $N_1(-1\|0)$ $N_2\left(-\frac{1}{2}\middle\|0\right)$	$y' = 6x^2 + 10x + 4$ $= 2(3x^2 + 5x + 2)$ $= 2(3x + 2)(x + 1)$ $y' = 0: x_{11} = -\frac{2}{3}$; $x_{12} = -1$ $f''(x_{11}) = 2 > 0 \Rightarrow T$ $f''(x_{12}) = -2 < 0 \Rightarrow H$ $H(-1\|0)\; T\left(-\frac{2}{3}\middle\|-\frac{1}{27}\right)$	$y'' = 12x + 10$ $= 2(6x + 5)$ $y'' = 0: x_{21} = -\frac{5}{6}$ $W\left(-\frac{5}{6}\middle\|-\frac{1}{54}; \; -\frac{1}{6}\right)$ W_{tg} $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{108}$

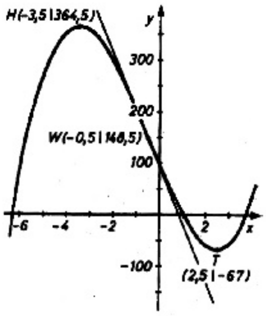


$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 105x + 95$$

$y = 4x^3 + 6x^2 - 105x +$
$+ 95 = (x-1)\cdot$
$\times(4x^2 + 10x - 95)$
$y = 0: x_{01} = +1$
$x_{02} = -6{,}281$
$x_{03} = 3{,}781$
$N_1(1|0)$ $N_2(-6{,}281|0)$
$N_3(3{,}781|0)$

$y' = 12x^2 + 12x - 105$
$= (2x+7)(6x-15)$
$y' = 0: x_{11} = -\frac{7}{2};$
$x_{12} = \frac{5}{2}$
$f''(x_{11}) = -72 < 0 \Rightarrow H$
$f''(x_{12}) = +72 > 0 \Rightarrow T$
$H(-3{,}5|364{,}5)$
$T(2{,}5|-67)$

$y'' = 24x + 12$
$y'' = 0: x_{21} = 0{,}5$
$W(0{,}5|148{,}5;$
$-108)$
W_{tg}
$y = -108x^2$
$= 94{,}5$

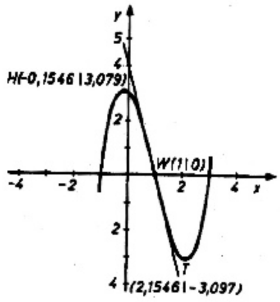


$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$
$= (x^2 - 1)(x - 3)$
$= (x+1)(x-1)(x-3)$
$y = 0: x_{01} = 1;\ x_{02} = 1;$
$x_{03} = +3$
$N_1(-1|0)\ N_2(1|0)$
$N_3(3|0)$

$y' = 3x^2 - 6x - 1$
$= 3\left(x^2 - 2x - \frac{1}{3}\right)$
$y' = 0: x_{11} = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\approx 2{,}1546$
$x_{12} = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\approx -0{,}1546$
$f''(x_{11}) = 6\cdot 1{,}1546$
$> 0 \Rightarrow T$
$f''(x_{12}) = 6\cdot(-1{,}1546)$
$< 0 \Rightarrow H$
$H(-0{,}1546|3{,}079)$
$T(2{,}1546|-3{,}079)$

$y'' = 6x - 6$
$= 6(x-1)$
$y'' = 0: x_{21} = 1$
$W(1|0;\ -4)$
W_{tg}
$y = -4x + 4$

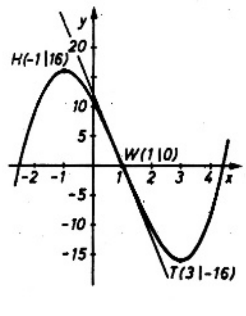


$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$
$= (x-1)(x^2 + 2x - 11)$
$y = 0: x_{01} = 1;$
$x_{02} = 1 + 2\sqrt{3} = 4{,}464;$
$x_{03} = 1 - 2\sqrt{3} = -2{,}464$
$N_1(1|0) \doteq W$
$N_2(4{,}464|0)$
$N_3(-2{,}464|0)$

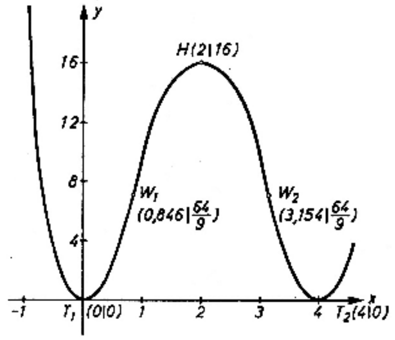
$y' = 3x^2 - 6x - 9$
$= 3(x-3)(x+1)$
$y' = 0: x_{11} = 3;$
$x_{12} = -1$
$f''(x_{11}) = 12 > 0 \Rightarrow T$
$f''(x_{12}) = -12 < 0 \Rightarrow H$
$H(-1|16);$
$T(3|-16)$

$y'' = 6x - 6$
$= 6(x-1)$
$y'' = 0: x_{21} = 1$
$W(1|0;\ -12)$
$W_{tg}:$
$y = -12x + 12$



$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$y = x^4 - 8x^3 + 16x^2$	$y' = 4x^3 - 24x^2 + 32x$	$y'' = 12x^2 + 48x +$
$= x^2(x-4)^2$	$= 4x(x^2 - 6x + 8)$	$+32$
$y = 0: x_{01/02} = 0$	$= 4x(x-2)(x-4)$	$y'' = 4(3x^2 - 12x +$
$x_{03/04} = 4$	$y' = 0;\quad x_{11} = 0;$	$+8)$
$N_{1/2}(0\|0) = T_1$	$x_{12} = +2 \quad x_{13} = +4$	$y'' = 0:$
$N_{3/4}(4\|0) = T_2$	$f''(x_{11}) = 32 > 0 \Rightarrow T$	$x_{21} = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$
	$f''(x_{12}) = -16 < 0 \Rightarrow H$	$\approx 0{,}846$
	$f''(x_{13}) = 32 > 0 \Rightarrow T$	$x_{22} = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$
	$T_1(0\|0) \quad T_2(4\|0)$	$\approx 3{,}154$
	$H(2\|16)$	$W_1\left(0{,}846 \,\middle\|\, \frac{64}{9}\right)$
		$W_2\left(3{,}154 \,\middle\|\, \frac{64}{9}\right)$



oder allgemein für diesen Typus

$$f(x) = x^4 - 2a\,x^2 + a^2 x^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

$y = x^4 - 2ax^2 + a^2x^2$	$y' = 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x$	$y'' = 12x^2 - 12ax +$
$= x^2(x^2 - 2ax + a^2)$	$= 2x(2x^2 - 3ax + a^2)$	$+2a^2 = 2(6x^2 -$
$= x^2(x-a)^2$	$= 2x(a-2x)(a-x)$	$-6ax + a^2)$
$y = 0: x_{01/02} = 0$	$y' = 0: x_{11} = 0;$	$y'' = 0$
$x_{03/04} = +a$	$x_{12} = \frac{a}{2};\quad x_{13} = a$	$x_{21} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
$N_{1/2}(0\|0) = T;$	$f''(x_{11}) = 2a^2 > 0 \Rightarrow T$	$x_{22} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
$N_{3/4}(a\|0) = T$	$f''(x_{12}) = 2a^2 - 6a^2 +$	$W_1\left(\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \,\middle\|\, \frac{a^4}{36}\right)$
	$+3a^2 = -a^2 < 0 \Rightarrow H$	$W_2\left(\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \,\middle\|\, \frac{a^4}{36}\right)$
	$f''(x_{13}) = 2a^2 > 0 \Rightarrow T$	
	$T_1(0\|0);\quad T_2(a\|0);$	
	$H\left(\frac{a}{2} \,\middle\|\, \frac{a^4}{16}\right)$	

$f(x) = x^4 - Bx^3$. Die Funktion soll einen Wendepunkt bei x = 100 haben. Wo ist dann die rechteste Nullstelle?

$\partial_x f(x) = 4x^3 - 3Bx^2$
$\partial^2_x f(x) = 12x^2 - 6Bx$
$\partial^2_x f(x) = 0$ für den Wendepunkt, $12x^2 - 6Bx = 6x(2x-B) = 0$. Somit ergeben sich mögliche Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = B/2$. Nur den zweiten Wert können wir verändern. Soll $x_w = 100$ sein, muss $B = 200$ sein.

Die gesuchte Funktion lautet daher **$f(x) = x^4 - 200x^3$**.

Wir suchen die Nullstellen: $f(x) = x^4 - 200x^3 = x^3(x-200) = 0$. Lösungen sind Null (dreifach) und 200.
Die gesuchte Antwort ist der größere Wert, das ist **200**.