

Warum sind die komplexen Zahlen cool ?

(Leonie, Bernadette, Saskia, Alisa und überhaupt der ganzen 7SV gewidmet)

Intro:

Du kennst die reellen Zahlen. Sie entsprechen den Punkten auf einer Strecke bzw. auf dem Zahlenstrahl.

- Man kann sie der Größe nach anordnen,
- Man kann mit ihnen rechnen. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (nicht durch Null) sind problemlos möglich.

Und doch haben sie einen Mangel. Man kann nicht aus jeder reellen Zahl die Quadratwurzel ziehen. Die Wurzel aus 4 ist 2, die Wurzel aus 1 ist 1. Aber was ist die Wurzel aus -4 ? Was ist die Wurzel aus -1 ?

Was tut ein Mathematiker, der auch diese Aufgaben lösen können möchte? Er tut erst einmal so, als ob es ginge, und schaut dann nach, ob die Idee überhaupt sinnvoll ist.

Also machen wir eine Erfindung

Wir erfinden eine neue 'Zahl' und nennen sie i . Was soll sie können? Sie soll uns helfen, die Wurzel aus negativen Zahlen zu ziehen. Sie muss also das Minus unter dem Wurzelzeichen verschwinden lassen. Nichts einfacher als das, wir setzen (definieren)

$$i^2 = -1$$

und sehen nach, was das für Folgen hat.

Das Schöne ist: Du musst NICHTS neues lernen, außer dieser einen Festlegung, dass i zum Quadrat -1 ist. Alles Weitere ergibt sich nun von selbst.

Beachte, dass ich nichts darüber ausgesagt habe, was i **ist** oder **sein soll**. Ich rede nur von i^2 . Warum? Weil i^2 gleich -1 ist und -1 eine reelle Zahl ist, mit der ich mich auskenne. i selbst kann gar keine reelle Zahl sein, da das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist.

Wie hilft uns dieses i nun?

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4i^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{i^2} = 2 \cdot i = 2i$$

Cool. Wir können die Wurzel aus negativen Zahlen berechnen. Schade, dass wir immer noch nicht wissen, was i **ist**. Forschen wir weiter:

Versuchen wir nun, eine quadratische Gleichung zu lösen:

$$z^2 - 8z + 25 = 0 \quad \text{Formel anwenden}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 25}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{-9}$$

an dieser Stelle mussten wir bisher aufhören und sagen, dass die gegebene Gleichung keine Lösung besitzt. Genau gesagt: es gibt keine reelle Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt. Aber mit unserer tollen Erfindung können wir weitermachen!

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{-9}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{9i^2}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm 3i$$

$$z_1 = 4 - 3i \quad , \quad z_2 = 4 + 3i$$

Es entstehen Zahlen, die aus einem 'normalen' Teil bestehen – der reellen Zahl 4 – und aus einem 'neuen' Teil mit unserem vorhin erfundenen i .

Weil dies 'zusammengesetzte' Zahlen sind, einigen wir uns auf folgende Sprechweise:

Diese neuen 'Zahlen' (falls es welche sind...) nennen wir **komplexe Zahlen** \mathbb{C} .
 Der Teil ohne i heißt sinnvollerweise **Realteil**, die Zahl beim i heißt **Imaginärteil**.
 $z = a+bi = \text{Real}(z) + \text{Imag}(z) \cdot i$
 i nennen wir ab nun die **imaginäre Einheit**.

Ist der Imaginärteil b gleich Null, ergeben sich unsere gewohnten reellen Zahlen. Die Zahlenmenge \mathbb{R} ist also in der neuen Zahlenmenge \mathbb{C} enthalten.

Bemerkung: Geschichtlich war es so, dass viele Mathematiker diesen Zahlen ablehnend gegenüberstanden. Sie betrachteten die 'gewohnten' Zahlen als wirklich ('reell') und diese neuen als Hirngespinnst ('imaginär'). Erst Gauss (1777-1855) konnte seinen Kollegen die Wichtigkeit dieser Zahlen zweifelsfrei erklären. Dabei waren sie unerkannt schon seit dem Mittelalter präsent – z.B. in Cardanos Formel (16. Jhdt) zur Berechnung der Lösungen von Gleichungen dritten Grades. Lustigerweise muss man dabei gerade in dem Fall, wo es drei reelle Lösungen gibt, formal mit Minussen in den Quadratwurzeln hantieren. Man dachte aber, dass dieser 'Makel' mit besseren Formeln zu beseitigen wäre. Erst später wurde bewiesen, dass es keine solche 'bessere' Formel gibt.

Sind diese neuen Objekte wirklich 'Zahlen', mit denen man arbeiten kann?

Zurück zu unserem Forschungsprojekt.

Auf jeden Fall müssen die Grundrechenarten sinnvoll funktionieren. Probieren wir einfach alle aus. Das heißt wir müssen zeigen, dass jede Rechnung mit komplexen Zahlen ein Ergebnis mit Realteil und Imaginärteil, also wiederum eine komplexe Zahl, hat. Versuchen wir $+$, $-$, und $:$

$$\begin{aligned} (5+2i)+(4-3i) &= 5+2i+4-3i = 5+4+2i-3i = 9-i \\ (5+2i)-(4-3i) &= 5+2i-4+3i = 1+5i \\ (5+2i) \cdot (4-3i) &= 20+8i-15i-6i^2 = 20+8i-15i+6 = 26-7i \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 \\ (5+2i):(4-3i) &= \frac{(5+2i)}{(4-3i)} = ??? \end{aligned}$$

Die Division macht Probleme. Wie bekommen wir den Nenner weg? Wir müssten einen Trick finden, ihn zu einer reellen Zahl zu machen. Den Nenner mit i multiplizieren (d.h. Den Bruch mit i erweitern) bringt nichts, denn dann steht das i beim Vierer. Wir müssten jeden Teil für sich quadrieren können – aber halt, das geht! Erinnerst Du Dich an die Formel $(a+b) \cdot (a-b) = a^2-b^2$ (wenn Du es nicht glaubst, dann rechne es aus)? Wir probieren $(4-3i) \cdot (4+3i) = 16-9i^2 = 16+9 = 25$. Es klappt!

$$(5+2i):(4-3i) = \frac{(5+2i)}{(4-3i)} = \frac{(5+2i) \cdot (4+3i)}{(4-3i) \cdot (4+3i)} = \frac{20+8i+14i+6i^2}{16-9i^2} = \frac{14+22i}{25} = \frac{14}{25} + \frac{22}{25}i$$

Das hat auch geklappt! Wir können also mit den komplexen Zahlen ganz normal rechnen!

Aber jetzt der Härtetest: **Was ist die Wurzel aus i** ? Nehmen wir an, es kommt die komplexe Zahl $a+bi$ als Ergebnis heraus, dabei sind a und b reell, und bestimmen wir ihre Eigenschaften (Profis nennen das einen 'unbestimmten Ansatz').

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= a+bi && \text{quadrieren, um die Wurzel loszuwerden} \\ i &= a^2+2abi+bi^2 && \text{zusammenfassen} \\ i &= a^2-b^2+2abi \end{aligned}$$

Vergleichen wir: rechts steht eine komplexe Zahl mit Realteil a^2-b^2 und Imaginärteil $2ab$. Links eine Zahl mit

Realteil Null und Imaginärteil 1. Da Realteil und Imaginärteil sich nicht mischen (das i unterscheidet sie), können wir Real- und Imaginärteil getrennt vergleichen und erhalten zwei Gleichungen in zwei Variablen. Das muss doch zu lösen sein!

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{für den Realteil}$$

$$2ab = 1 \quad \text{für den Imaginärteil}$$

Wie üblich drücken wir mithilfe der einfacheren Gleichung (der unteren) eine Variable aus und setzen sie in die andere ein.

$$b = \frac{1}{2a}$$

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \Rightarrow a^4 = \frac{1}{4}$$

damit wird a^2 gleich $\pm \frac{1}{2}$. Das Minus kann nicht stehen, weil a^2 als Quadrat einer reellen (!) Zahl positiv sein muss. Also ist $a^2 = \frac{1}{2}$ und wir können einsetzen

$$a^2 = \frac{1}{2}, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{1}{2a} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{erste Lösung } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \text{zweite Lösung } -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{oder } \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Das ist echt cool. Wir können aus jeder komplexen Zahl die Wurzel ziehen. Wir können also mit diesen Zahlen **alle Rechenarten ohne Einschränkung** (außer durch 0 teilen) ausführen!

Ist C besser als R ?

Vielleicht warst Du versucht, die obigen zwei Lösungen als eine 'positive' und eine 'negative', wie bei den reellen Zahlen zu sehen. Da gibt es aber ein Problem: ist $7-7i$ positiv oder negativ? Was ist mit $-7+7i$? Es gibt also auch etwas, was die komplexen Zahlen nicht können – sie können NICHT der Größe nach angeordnet werden. Man kann von zwei komplexen Zahlen NICHT sagen, welche die größere von beiden ist.

Nachtrag: Beim Dividieren hat uns das Erweitern mit einer Zahl geholfen, die genau wie sie aussieht, deren Imaginärteil aber das andere Vorzeichen hat. So ein Zahlenpaar wird häufig benötigt. Wir nennen $a-bi$ die zu $a+bi$ **konjugiert komplexe Zahl** (Du kennst das Wort konjugieren aus dem Sprachunterricht – abwandeln). Die zur Zahl z konjugierte wird gern mit einem Sternchen als z^* oder einer Überstreichung als \bar{z} gekennzeichnet.

Erfolg:

Wir haben den komplexen Zahlen eine Daseinsberechtigung gegeben: man kann mit ihnen rechnen, so wie wir es gewohnt sind. Und mit ihnen können wir ALLE Rechenarten uneingeschränkt durchführen!

Geometrische Deutung durch Gauss

Man denkt sich Real- und Imaginärteil als Punktkoordinaten in einer Ebene.

- Dann werden Addition und Subtraktion zu Vektoraddition und Vektordifferenz.
- Mithilfe der (wir lernen sie heuer nicht) Polarform kann man zeigen, dass Multiplikation und Division geometrisch als Streckung und Drehung gesehen werden können. (z.B. $\cdot i$ bedeutet 'dreh Dich um 90° ')

Die 'alternative' Darstellung der komplexen Zahlen mithilfe von Polarkoordinaten (erinnere Dich - ein Eisbär zeichnet auf dem Nordpol das geographische Gradnetz auf): Dabei beschreibt man eine Zahl nicht durch Real- und Imaginärteil (kartesische Koordinaten), sondern in der Gauss'schen Zahlenebene durch ihren

Betrag, d.h. ihren Abstand r vom Nullpunkt und ihr 'Argument', den Winkel ϕ , den ihr Ortsvektor mit der positiven reellen Achse einschließt.

Die Umrechnung ist einfach:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad , \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

$$a = r \cos \phi \quad , \quad b = r \sin \phi$$

Braucht man die komplexen Zahlen überhaupt?

In der Mathematik:

- Sie erlauben neue Erkenntnisse und Einsichten. Etwa, dass die Winkelfunktionen und die Exponentialfunktion ganz eng miteinander verwandt sind (schneide die komplexe Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse auf. Dann erhältst Du Zahlenwerte, deren Realteil der Cosinus und deren Imaginärteil der Sinus sind)

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$$

- Der wohl erstaunlichste Zahlen-Zusammenhang der Mathematik

$$e^{i\pi} = -1$$

- Oft lassen sich Aussagen über reelle Zahlen leichter beweisen, wenn man sie in den komplexen Zahlen formuliert
- Eine Gleichung n -ten Grades hat in \mathbb{C} genau n Lösungen. Was für ein schöner Satz im Vergleich zu \mathbb{R} !

In der Physik:

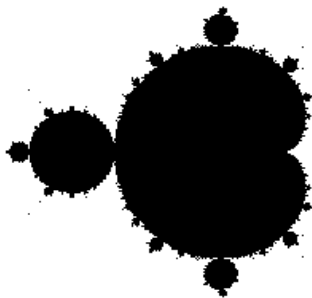
- Die Maxwell'schen Gleichungen des Elektromagnetismus lassen sich komplex gut formulieren. Also gäbe es ohne komplexe Zahlen kein Fernsehen, kein Handy,...
- Bei Schwingungen kann man Amplitude und Phase in einer einzigen Zahl unterbringen. Und ihr physikalisches Verhalten lässt sich gut mittels komplexer Zahlen formulieren. Geschichtlich: die Physiker konnten auf die bereits bekannte Mathematik der komplexen Zahlen zurückgreifen. (Die heutige Stringtheorie der Physiker kämpft mit dem Problem, dass die mathematischen Konzepte zu ihrer Formulierung noch gar nicht existieren und gleichzeitig mitentwickelt werden müssen...)
- Die Quantenphysik (seit Schrödinger) ist ohne komplexe Zahlen nicht möglich – ihre wichtigste Größe, die Wellenfunktion, ist eine komplexe Funktion. Ohne komplexe Zahlen kein Laser (DVD-Player).

Zur Bewusstseinsweiterung:

- was ist eine **komplexe Funktion**: sie ordnet jeder (komplexen) Zahl der Wertemenge eine (komplexe) Zahl der Bildmenge zu. Sie geht also von der zweidimensionalen komplexen Ebene in die zweidimensionale komplexe Ebene. Um ihren Graphen zu zeichnen, bräuchten wir 4 Achsen, also einen vierdimensionalen Raum. Wer kann sich das vorstellen?

Vereinfachung: Wir betrachten etwa nur den Betrag der Bildpunkte, oder nur ihr Argument, oder versuchen farbige Darstellungen. (Die mathematische Wissenschaft der Untersuchung dieser Funktionen heißt 'Funktionentheorie' und gehört ins Repertoire jedes ernstzunehmenden Mathematikers)

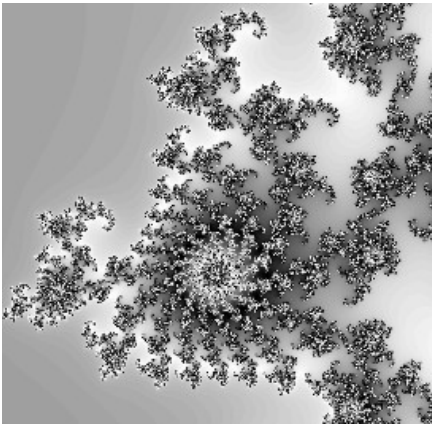
- Geht es noch wilder? Ja, man kann die komplexen Zahlen zur Zahlenmenge der **Quaternionen** erweitern. Dort gibt es 3 verschiedene imaginäre Einheiten. $z = a + bi + cj + dk$. Du wirst sie in der fraktalen Geometrie wieder treffen.
- Die berühmte Mandelbrotmenge ist ein Abbild einer komplexen Funktion. Du willst wissen, welche?



Sicher unkompliziert... Nein, gar nicht wahr.

$$f(z) = z^2$$

Und doch handelt es sich irgendwie um das komplizierteste Gebilde, das wir je gesehen haben. Details erfährst Du später (mit der neuen Matura aber leider gar nicht mehr)



Und nochwas: Diese Menge ist 'universell' – auch jede mathematisch begabte Alien-Spezies stößt irgendwann auf dieses Gebilde. (Andere universelle mathematische Objekte wären etwa die Primzahlen oder die Zahl π)

Ja aber was ist denn dieses i ?

A: Sag mal, was ist **die Wurzel aus 2** ?

B: Die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

A: Wozu braucht man sie?

B: Etwa zum Berechnen der Diagonale im Quadrat. Aber auch die Abmessungen Deiner Schreibhefte enthalten diese Zahl. Dividiere doch mal Länge durch Breite!

A: Na schön. Die Wurzel aus 2 ist also wichtig. Ich wollte aber wissen, was sie ist. Du hast mir nur eine Eigenschaft genannt. Was ist sie denn nun?

B: Ähm..... Man kann super mit ihr arbeiten. Sie hilft, Fragestellungen zu beantworten. Das reicht uns Mathematikern.

A: Sag mal, was ist denn dieses i ?

B: Die Zahl, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt.

A: Wozu braucht man sie?

B: Etwa zum Lösen von quadratischen Gleichungen. Aber auch Dein Handy gäbe es ohne komplexe Zahlen nicht, weil man seine elektrischen Schaltungen sonst nicht berechnen könnte. Und keinen Fernsehapparat!

A: Na schön. i ist also wichtig. Ich wollte aber wissen, was i ist. Du hast mir nur eine Eigenschaft genannt. Was ist i denn nun?

B: Ähm..... Man kann super mit i arbeiten. Es hilft, Fragestellungen zu beantworten. Das reicht uns Mathematikern.

Computertips:

Wenn Du Dich in die Grafik hineintigern möchtest:

1.) Informatikunterricht

2a) Das Programm 'EigenMath' ist ein praktischer Taschenrechner für komplexe Zahlen. Die geniale Programmiersprache 'Python' hat die komplexen Zahlen schon fix eingebaut.

2b) Das Programm 'Maxima' erzeugt wunderbare Grafiken auch komplexer Funktionen (Grundwissen nötig)

3.) Experimente mit Mandelbrotmengen und ihren Verwandten: Etwa die Programme 'ManPWin' oder 'Fractal Explorer'. Details, wie gesagt, in der 8. Klasse (noch...). Stichwort : Fraktale Geometrie.

Frag einfach Deinen Mathe-, Physik- oder Informatiklehrer.

Anhang für neugierige Maturanten

Eine der schönsten und wichtigsten Formeln der Mathematik ist die **Euler-Formel**:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

Mithilfe der komplexen Zahlen erkennen wir, dass Sinus und Cosinus zwei Komponenten einer einzigen Funktion sind, nämlich der Exponentialfunktion. Und das ist sensationell – in \mathbb{C} sind diese drei Funktionen vereinheitlicht!

Beweisskizze (in der Schule nicht besser möglich):

Wir haben in der 6. Klasse die Zahl e kennengelernt. Man kann die Exponentialfunktion als Reihe schreiben:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Analog kann man die Cosinus- und Sinusfunktionen zerlegen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

Versuche nun, mithilfe der Reihe für e^x die Entwicklung von e^{ix} aufzuschreiben, indem Du die gewohnten Vereinfachungen für i^2, i^3, i^4, \dots anwendest. Sortiere dann den Realteil und den Imaginärteil der Reihe.

oder:

Wir leiten e^{ix} ab.

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = i \cdot e^{ix}, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{ix} = i^2 \cdot e^{ix} = -e^{ix}, \quad \frac{d^4}{dx^4} e^{ix} = i^4 \cdot e^{ix} = e^{ix}$$

Die vierte Ableitung ist die unveränderte Ausgangsfunktion, die zweite hat ein Minus davor. Dieses Verhalten haben wir schon bei Sinus und Cosinus kennengelernt. Wenn wir $x=0$ einsetzen, kommt 1 heraus, das ist der Cosinus von Null und deshalb der Realteil.

Was ist i hoch i ?

Mithilfe der Eulerformel können wir folgendermaßen rechnen

$$e^{i\pi} = -1 = i^2 \quad \text{auf beiden Seiten hoch } i$$

$$e^{i \cdot i\pi} = e^{-\pi} = i^{2i}$$

$$\frac{1}{e^\pi} = i^{2i} \quad \text{Quadratwurzel}$$

$$\sqrt{\frac{1}{e^\pi}} = i^i$$

Dieses Resultat ist echt erstaunlich. Imaginär hoch imaginär ist eine ganz gewöhnliche reelle Zahl.

Übung: Was ist die i -te Wurzel aus i ? Die Rechnung ist fast gleich wie oben.