Integrieren – Volumsberechnung

Nötiges Vorwissen

– Den Verlauf eines Graphen skizzieren können, Kurvendiskussion (speziell Nullstellen und Extremwerte)

– Ein Integral berechnen können, Flächenintegral

Grundlagen

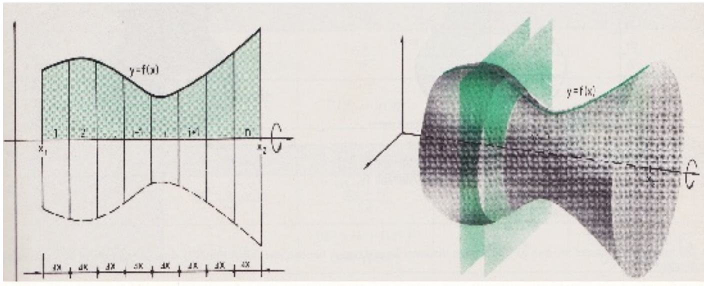
Wie haben wir den Flächeninhalt durch Kurven begrenzter Bereiche mithilfe des Integrals berechnet:

Durch Aufteilung des Bereichs in lauter kleine Rechtecke konnten wir eine Annäherung finden, die sich bei Verfeinerung der Streifen gleichmäßig immer mehr der gesuchten Fläche annähert.

Für den Rauminhalt von Drehkörpern (der Graph einer Funktion rotiert um eine Achse) können wir das Volumen durch viele kleine Zylinderscheiben annähern. Ihr Radius ist der Abstand von der Drehachse, also der Funktionswert. Ihre Höhe ist das winzig kleine Stückchen dx oder dy.

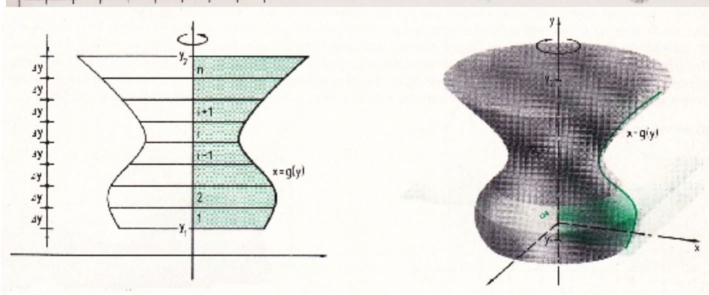
$y = f(x)$ um die x-Achse

$$V_x = \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot \pi \, (f(x))^2 = \pi \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot y^2$$



$x = f(y)$ um die y-Achse

$$V_y = \int_{y_1}^{y_2} dy \cdot \pi \, (f(y))^2 = \pi \int_{y_1}^{y_2} dy \cdot x^2$$



Beispiel 1

Berechne den Rauminhalt der Drehkörper, die bei Rotation der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ a) um die x-Achse, b) um die y-Achse entstehen

a) um die x-Achse. Nullstellen sind die Scheitel (y=0) bei x = -3, x=+3.

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad y^2 = 4 - \frac{1}{9}x^2$$

$$V_x = \pi \int_{-3}^{3} dx \cdot (4 - \frac{1}{9}x^2) \quad = \quad \pi \cdot (4x - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{+3} \quad = \quad \pi\,[(12-1) - (-12+1)] \quad = \quad 22\,\pi$$

b) um die y-Achse. Nullstellen sind die Scheitel (x=0) bei y = -2, y=+2.

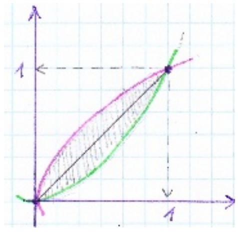
$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 - \frac{1}{4}y^2$$

$$V_y = \pi \int_{-2}^{2} dy \cdot (9 - \frac{1}{4}y^2) \quad = \quad \pi \cdot (9y - \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3})\Big|_{-2}^{+2} \quad = \quad \pi\,[(18 - \frac{2}{3}) - (-18 + \frac{2}{3})] \quad = \quad 34\frac{2}{3}\,\pi \;\text{ oder }\; \frac{104}{3}\,\pi$$

In beiden Fällen könnte man wegen der Symmetrie wiederum Arbeit sparen, wenn man von 0 an integriert und das Ergebnis verdoppelt. Auch erspart man sich dadurch das wegen der vielen zu beachtenden Vorzeichen fehlerträchtige Einsetzen negativer Zahlen.

Beispiel 2

Das Flächenstück, das die Funktionen $f(x) = x^n$ und $F(x) = \sqrt[n]{x}$ im ersten Quadranten einschließen, rotiert um die x- (oder y-) Achse. Wie groß ist das entstehende Volumen?



Wegen der Symmetrie ist es egal, um welche Achse die Fläche gerdeht wird. (Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion sind immer spiegelsymmetrisch zur Diagonale = zur ersten Mediane)
Ich wähle x. Die Wurzelfunktion liegt weiter von der Drehachse entfernt als die Potenzfunktion.

$$V = \pi \int_0^1 dx \cdot y_{Wurzel}^2 - \pi \int_0^1 dx \cdot y_{Potenz}^2 = \pi \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{2}{n}} - \pi \int_0^1 dx \cdot y^{2n} = \ldots$$

Beispiel 3

Eine senkrechte Gerade in bei x = R rotiert über dem Intervall [0,H] um die y-Achse. Welches Volumen entsteht?

$$V = \pi \int_0^H dy \cdot x^2 = \pi \int_0^H dy \cdot R^2 = \pi R^2 \int_0^H dy\ 1 = \pi R^2 \cdot y \Big|_0^H = \pi R^2 \cdot (H-0) = R^2 \pi H$$

und das ist die Formel des Zylindervolumens.
(Allerdings ist dies keine faire Herleitung – wir haben diese Formel ganz zu Anfang bereits benutzt, um das Volumsintegral zu 'erfinden'. Wir haben also nur die Information erhalten, die wir bereits hineingesteckt haben.)

Beispiel 4a

Der Kreis $x^2+y^2 = r^2$ rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen dieses Drehkörpers?

$$V = \pi \int_{-r}^{r} dx \cdot y^2 = \pi \int_{-r}^{r} dx \cdot (r^2 - x^2) = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)\Big|_{-r}^{r} = \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3} r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3\right)\right]$$
$$= \frac{4 r^3}{3} \pi$$

und das ist die Formel des Kugelvolumens. Das ist neu und toll!
(Kann man übrigens für alle symmetrischen Figuren mit einer einzigen Größenangabe so machen – probiere es selbst für einen Würfel $[-A,A]^3$)

Beispiel 4b (Ergänzung)

Blasen wir eine Kugel um ein winziges Radiuselement dr auf, so vergrößert sie sich ein wenig. Dieses 'wenig' ist genau die Oberfläche dieses Körpers, so wie die Schale einer Orange flach aufgelegt genau die Oberfläche der Orange misst. Die Kugeloberfläche ist nichts anderes als eine 'Haut' auf der Kugel, die durch eine winzige Änderung des Radius entsteht. Aber das ist doch genau die Idee des Differenzierens:

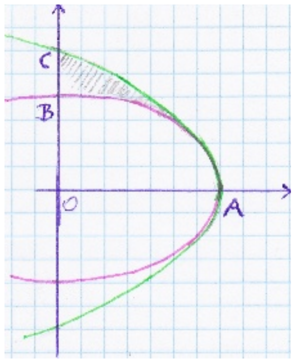
$$O = \frac{dV}{dr} = \partial_r \frac{4 r^3}{3} \pi = 4 r^2 \pi$$

womit wir die Formel der Kugeloberfläche hergeleitet haben.

Beispiel 5

Die Ellipse *ell* und die Parabel *par* schließen mit der y-Achse ein sichelförmiges Flächenstück ein. Dieses rotiert a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Berechne jeweils den Rauminhalt des entstehenden Drehkörpers.

ell: $x^2 + 4y^2 = 36$ *par*: $y^2 = 36 - 6x$



Die Parabel ist symmetrisch zur x-Achse (+/- y ist egal). Ihren Scheitel finden wir mit y=0, was x = 6 ergibt, sie ist nach links offen (negativer x-Koeffizient).

Bei der Ellipse liefert y=0 ein a von 6, der rechte Ellipsenscheitel fällt also genau mit dem Parabelscheitel zusammen. Mit x=0 erhalten wir die kleine Halbachse b=3.

Damit haben wir A =6 und B=3 aus der Skizze gefunden.

C ergibt sich durch den Schnitt der Parabel mit der y-Achse, x=0 gibt $y^2 = 36$ und die Lösungen C = 6 (oben) oder -6 (unten)

Rotation um die x-Achse:
Von 0 bis A ist die gesuchte Fläche oben durch die Parabel, unten durch die Ellipse begrenzt.

$$V_x = \pi \int_0^A dx \cdot y_{par}^2 - \pi \int_0^A dx \cdot y_{ell}^2$$

Wir müssen aus beiden Kurvengleichungen y^2 ausdrücken und in die Integrale einsetzen:

$$ell: y^2 = 9 - \frac{1}{4} x^2$$
$$par: y^2 = 36 - 6x$$
$$V_x = \pi \int_0^6 dx \cdot (36 - 6x) - \pi \int_0^6 dx \cdot (9 - \frac{1}{4} x^2) = \pi (36x - 3x^2)\Big|_0^6 - \pi (9x - \frac{1}{12} x^3)\Big|_0^6 = \ldots$$

Rotation um die y-Achse:
Nun handelt es sich um zwei gleiche Teile ober- und unterhalb der x-Achse. Ich berechne nur den oberen Teil und verdopple zuletzt das Ergebnis.
Wandern wir die y-Achse entlang, so ist die gesuchte Fläche von 0 bis B durch *par* (oben) und *ell* (unten) begrenzt. Von B bis C ist *par* alleine die Grenze bis zur Achse.
Oder einfacher: Wir berechnen das Volumen bezüglich der Parabel von 0 bis C und schneiden dann das Ellipsoid heraus. Das geht schneller zu rechnen:

$$V_y = \pi \int_0^C dx \cdot x_{par}^2 - \pi \int_0^B dy \cdot x_{ell}^2$$

Wir müssen aus beiden Kurvengleichungen x^2 ausdrücken und in die Integrale einsetzen:

$$ell: x^2 = 36 - 4y^2$$
$$par: x = 6 - \frac{1}{6} y^2 \Rightarrow x^2 = 36 - 2y^2 + \frac{1}{36} y^4$$
$$\overline{V}_y = \pi \int_0^6 dy \cdot (36 - 2y^2 + \frac{1}{36} y^4) - \pi \int_0^3 dy \cdot (36 - 4y^2) = \pi (36y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{180} y^5)\Big|_0^6 - \pi (36y - \frac{4}{3} y^3)\Big|_0^3 = \ldots$$
$$V_y = 2 \cdot \overline{V}_y = \ldots$$

Die Berechnung dieser Integrale mit den vielen Klammern und dem Pi ist recht umständlich anzuschreiben. Man kann ruhig für jedes einzelne Integral eine Nebenrechnung machen (optisch erkennbar!) und die jeweiligen Ergebnisse dann in die Antwort einsetzen. Nichts vergessen!

In einem Mathe-Programm wie Maxima oder Derive ist das freilich alles ein Klacks...