

Integrieren – wie geht das?

Ich kann Dir das Integrieren nur erklären, wenn wir zuvor das Differenzieren wiederholen. Das machen wir ganz formal, ohne die zugrundeliegenden Ideen zu besprechen. Nur so viel:

Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x :=$ (Tangenten-)Anstieg der Kurve f an der Stelle x

$$f' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \partial_x f = \partial_x f(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ beschreibt die Tangente wegen } f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x, \Delta x \rightarrow 0$$

Mit 'Differenzieren' meinen wir das rechnerische Auffinden der Ableitungsfunktion.

Wir erinnern uns an den exakten Sprachgebrauch: differenzieren kann man nur Variable (man bildet aus y das Differential dy), Funktionen werden abgeleitet (man bildet aus $f(x)$ die Ableitungsfunktion $f'(x)$).

Ableitungen

Einige bekannte Grundfunktionen:

Funktion	ihre Ableitung
x	1
$\frac{x^2}{2}$	x
$\frac{x^3}{3}$	x^2
$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	x^n
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Die folgenden Regeln erlauben es uns, **jede Funktion** abzuleiten, und sei sie auch noch so kompliziert aus den Grundfunktionen zusammengesetzt.

$(\alpha \cdot f)'$	$= \alpha \cdot f'$	Vielfaches
$(f \pm g)'$	$= f' \pm g'$	Summe und Differenz
$(f \cdot g)'$	$= f' \cdot g + f \cdot g'$	Produktregel
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	Quotientenregel
$(f(g(x)))'$	$= f'(g(x)) \cdot g'$	Kettenregel

Die Ableitungsfindung ist als 'Rechenvorschrift' aufzufassen, die aus einer Funktion eine andere macht. Mathematiker nennen die entsprechende Rechenmaschine (Black Box) den 'Differentialoperator':

$$\partial_x : f(x) \rightarrow f'(x)$$

Computerhilfe:

um die Funktion $x^3 \sin(x)$ abzuleiten, tippt man

- in EigenMath $d(x^3 \sin(x))$ und <ENTER>

- in Maxima $diff(x^3 * \sin(x), x);$ und <shift ENTER>

Die Stammfunktion – technisch gesehen

Wir könnten ein Spiel machen: Du denkst Dir eine Funktion f aus, leitest sie ab und sagst mir f' . Ich will dann versuchen, Deine ursprüngliche Funktion f herauszufinden.

Sagst Du etwa $12y^2$, wäre meine Antwort $4y^3$. Dein $\sin(a)$ würde ich mit $-\cos(a)$ kontern.

Eine neue Rechenart, ich nenne sie I : **das Gegenteil vom Ableitungsbilden**. Ganz salopp aufgeschrieben für $f(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_x : f(x) &\rightarrow f'(x) && \text{Ableitung bilden} \\ I : f'(x) &\leftarrow f(x) && \text{Ableitung umkehren} \end{aligned}$$

Die Funktion I stellt bei Anwendung auf eine Ableitung also die ursprüngliche Funktion wieder her.

$F(x)$ heißt eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ ist: $\partial_x F = f$

Warum 'eine' Stammfunktion: zum Beispiel $(x^3)' = 3x^2$. Aber auch $(x^3+4)' = 3x^2$ und $(x^3-8)' = 3x^2$ oder allgemein $(x^3+C)' = 3x^2$ für jede Zahl C . Jede Funktion besitzt demnach unendlich viele Stammfunktionen, aber alle unterscheiden sich nur um eine Konstante. Das merken wir uns – kennen wir eine Stammfunktion, kennen wir alle. Beim Integrieren spielt diese Konstante eigentlich nie eine Rolle, wir können sie in der folgenden Liste weglassen ($C = 0$).

Drehen wir obige Tabelle der abgeleiteten Funktionen einfach um, erhalten wir eine Tabelle der Stammfunktionen:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

Welche Regeln können wir von oben übernehmen? Bezeichnen wir die Stammfunktionen mit I :

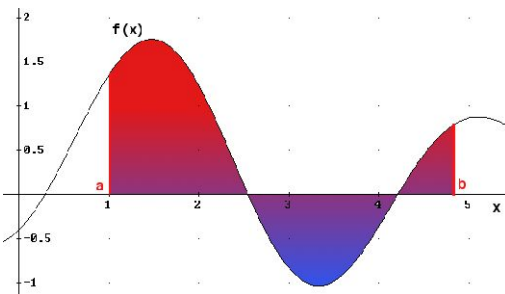
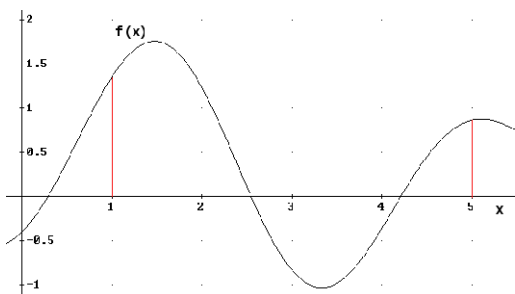
$I(\alpha \cdot f)$	$= \alpha \cdot I(f)$	Vielfaches
$I(f \pm g)$	$= I(f) \pm I(g)$	Summe und Differenz

Die übrigen Regeln lassen sich leider nicht so einfach übertragen.

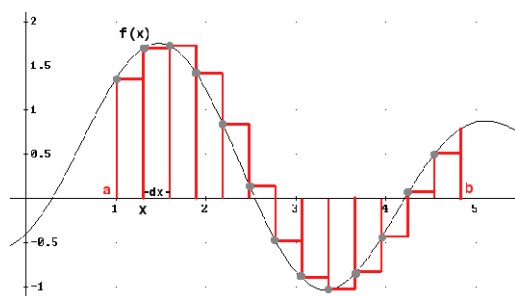
Integrieren – was steckt dahinter

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Berechnung des Flächeninhaltes durch Kurven begrenzter Gebiete. Nehmen wir der Einfachheit halber eine Funktion $y = f(x)$.

Gegeben seien diese Funktion f , sowie zwei Stellen a und b auf der x -Achse. Die $f(x)$ -Kurve (ihr Graph), die x -Achse und die Vertikalen an diesen zwei Stellen schließen eine Fläche ein.

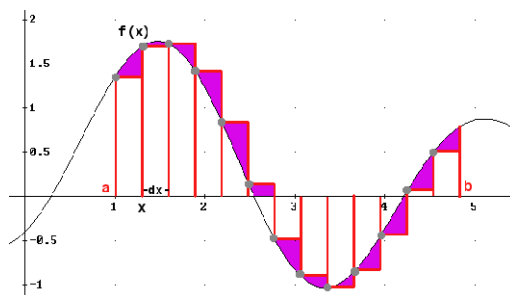


Da diese Fläche nicht nur von Geradenstücken begrenzt wird, kommen wir mit unserem bisherigen Wissen nicht weiter. Wir könnten die Fläche aber mithilfe einfacher Figuren abschätzen. Es bieten sich Rechtecke an:

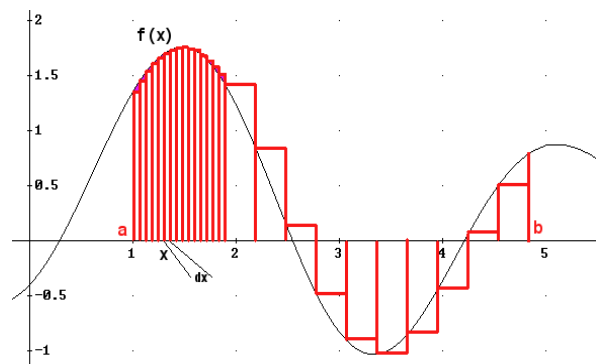


Wir machen alle Streifen gleich breit (Breite dx) und so hoch, dass ihre linke Kante genau bis an den Graphen reicht. Damit ist der gesuchte Flächeninhalt ungefähr gleich der Summe aus allen diesen Rechteckstreifenflächen.

Leider ist die Abschätzung nicht sehr genau – manche Streifen erwischen zu viel Fläche, manche zu wenig im Vergleich mit der Kurvenlinie.



Ein Verbesserungsvorschlag? Je dünner die Streifen sind (je kleiner wir dx wählen), und je mehr Streifen wir deshalb zeichnen, desto genauer ist die Abschätzung:



Jetzt ist der Fehler fast nicht mehr sichtbar!

Machen wir dx immer kleiner und kleiner, lassen es also 'gegen Null' gehen, wird die Summe der Rechteckstreifenflächen der gesuchten Fläche immer ähnlicher.

Diese Erkenntnis sieht in cooler Mathe-Schreibweise so aus:

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \sum \text{Streifenflächen} = \sum dx \cdot f(x) \rightarrow \text{gesuchte Fläche}$$

Wir führen folgende Schreibweise ein

$$\text{Fläche unter } f \text{ zwischen } a \text{ und } b =: \int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx f$$

Dies ist das **Integral** über (die Integrationsvariable) x von (den Integralgrenzen) a bis b **der Funktion $f(x)$** . Das neue Zeichen, das wie ein überlanges „S“ geschrieben wird, soll uns daran erinnern, dass hier sehr sehr viele sehr sehr kleine (infinitesimale) Summanden aufaddiert werden. Es ist aber trotzdem als ein ganz

harmloses Summenzeichen zu verstehen. Es ist nichts Geheimnisvolles dran.
 (Falls beim Integralzeichen keine Grenzen stehen, meint man immer den gesamten Wertebereich der Variable.)

Wir halten uns an die Rechenregeln für reelle Zahlen:

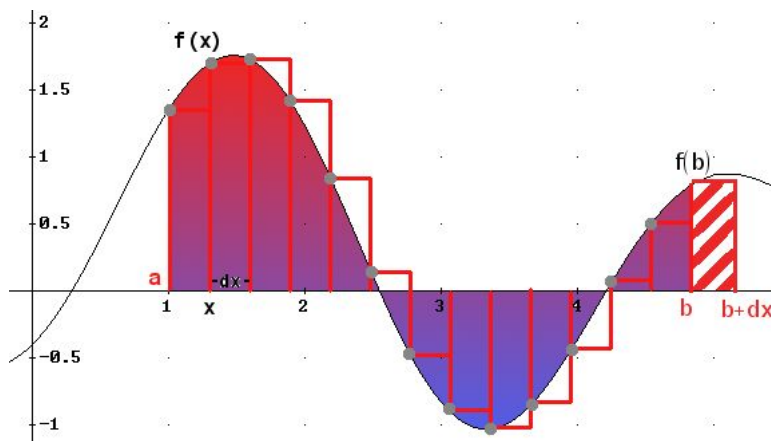
- ist der Graph unterhalb der x-Achse, rechnen wir die Rechteckshöhe negativ, da $f(x) < 0$ ist
- liegt b links von a, d.h. b ist kleiner als a, müssen wir negative dx-Werte wählen, um von a zu b zu gelangen.

Folgerungen

$\int_a^a dx f(x) = 0$	Die Breite der Fläche ist Null, also ist auch ihr Inhalt gleich Null
$\int_a^b dx \text{const} = \text{const} \cdot (b-a)$	Bei konstante Funktion ist die gesuchte Fläche ein Rechteck
$\int_a^b dx f(x) = -\int_b^a dx f(x)$	Durch das Vertauschen der Integrationsgrenzen bekommen alle dx das entgegengesetzte Vorzeichen
$\int_a^b dx \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_a^b dx f$	Sind alle Rechtecke α -mal so hoch, ist die Fläche α -mal so groß
$\int_a^b dx f + g = \int_a^b dx f + \int_a^b dx g$	Das Pluszeichen setzt immer zwei Streifenhöhen übereinander
$\int_a^b dx f = \int_a^c dx f + \int_c^b dx f$	Die Fläche wird in zwei Teile geteilt. (Zusatzinfo: daer Wert C muss gar nicht zwischen a und b liegen)

Ist Dir aufgefallen, dass wir jede Menge Eigenschaften des Integrals kennen, ohne dass wir wissen, wie man es eigentlich praktisch berechnen kann? Deshalb verrate ich Dir jetzt den

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Vergrößern wir das Integrationsintervall rechts um einen Streifen der Breite Δx über b hinaus, kommt eine Rechtecksfläche mit Inhalt $f(b) \Delta x$ zur Gesamtfläche **hinzu**.

(Analog: beginnen wir links erst an der Stelle $a+\Delta x$ mit der Summation, kommt eine Rechtecksfläche mit Inhalt $f(a) \Delta x$ von der Gesamtfläche **weg**.)

Damit erhalten wir zwar keine Information über das Integral selbst, jedoch über die **Änderung** seines Wertes. Und da erinnern wir uns – wer beschreibt die Änderung einer Funktion? Richtig, die **Ableitung!**

$$\partial_b \text{Fläche}(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Fläche}(b+\Delta x) - \text{Fläche}(b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(b)\Delta x}{\Delta x} = f(b)$$

$$\partial_b \int_a^b dx f(x) = f(b)$$

$$\partial_b F(b) = f(b)$$

(und analog ergäbe sich $\partial_a \int_a^b dx f(x) = -f(a)$)

Und was bedeutet $\partial_b F(b) = f(b)$, wobei wir jetzt dieses ganze Integral mit F bezeichnet haben? Doch

genau die Tatsache, dass f die Ableitung der Funktion F ist. Umgekehrt siehe oben: F ist eine Stammfunktion von f ! Jetzt wissen wir endlich, wie man Integrale berechnet – man sucht Stammfunktionen!

Und da sich alle Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden können, gilt für eine beliebige Stammfunktion F von f :

$$\int_a^b dx f(x) = F(b)+C \quad \text{Setzen wir hier } b=a \text{ ein, erhalten wir} \quad 0 = \int_a^a dx f(x) = F(a)+C \quad \text{bzw.} \quad C = -F(a)$$

Und jetzt kann ich Dir den berühmten **Hauptsatz** auftischen:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$$

Der Wert des Integrals der Funktion $f(x)$ über dx in den Grenzen von a bis b ist die Differenz aus dem Stammfunktionswert an der Obergrenze minus dem entsprechenden Wert an der Untergrenze.

(Beachte: 'Obergrenze' bezeichnet immer die Zahl, die im Integral oben steht. Auch falls sie kleiner als die Untergrenze sein sollte.)

Nun ein Beispiel, an dem ich Dir gleich eine praktische Schreibweise vorführe. Wir können in der bereits gefundenen Liste der Stammfunktionen nachschlagen:

$$\begin{aligned} \int_1^3 dx x^2 - 8x^3 &= \int_1^3 dx \partial_x \left[\frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^4}{4} \right] = \left[\frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^4 \right]_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^4 \right) \Big|_{x=3} - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^4 \right) \Big|_{x=1} = \\ &= (9 - 162) - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) = -151 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wenn Du geübt bist, kannst Du gerne einige Zwischenschritte im Kopf ausführen. Doch mit Bedacht – eine übersichtliche Schreibweise macht sich bezahlt.

Die Klammern um die Terme bei der Differenz empfehle ich Dir dringend – wie leicht vergisst man sonst, dass sich das Minus auf den gesamten Klammerinhalt bezieht.

Noch ein Beispiel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \cos(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \partial_t \sin(t) = \sin(t) \Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Wenn Du schon geübt bist, kannst Du ganz kurz schreiben:

Angabe → Stammfunktion mit Grenzen → (Wert an Obergrenze) minus (Wert an Untergrenze) → Vereinfachen

$$\int_{-1}^3 dz 8z^3 - 3z^2 = (2z^4 - z^3) \Big|_{-1}^3 = (162 - 27) - (2 + 1) = 135 - 3 = 132$$

Eigentlich sieht die Sache ganz einfach aus: man muss nur den Vorgang des 'Differenzierens' umkehren, und schon kann man 'integrieren'. Differenzieren und Integrieren scheinen also gleich 'schwierig' zu sein.

Die Realität sieht zum Leidwesen aller Mathematiker anders aus. Während wir beim Differenzieren Regeln für alle Rechenarten (plus, minus, mal, dividiert, hoch, Verkettung) kennen und demnach alles differenzieren können was uns unterkommt, gibt es diese vollständige Liste für das Integrieren NICHT.

Die Mathematik hat nur einige Methoden entwickelt, mit denen man Integrale UMFORMEN kann, in der Hoffnung, dass man danach die Stammfunktion leichter erraten (ja, richtig gelesen!) kann. Universell anwendbare Regeln gibt es leider nicht. Ja Leute, so traurig sieht's aus. Das Leben kann hart sein.

Aber: Obwohl das Integral für uns nur eine Methode zur Berechnung von Flächeninhalten ist, lassen sich unglaublich viele Aufgaben darauf zurückführen. Man integriert, wenn man z.B.

- Das Volumen einer 21-dimensionalen Kugel wissen will
- Die Länge einer gekrümmten Kurve berechnen möchte
- Den Schwerpunkt komplizierter Objekte bestimmt
- Das Verhalten von Elektronen im Atomkern beschreiben will
- Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen berechnet
- Raketenflugbahnen vorausberechnet
- Audiodateien in MP3s verwandelt
- Achterbahnloopings konstruiert
- Autocrashtests simuliert

(Was ist der Grund: All diese Zusammenhänge lassen sich mithilfe von Funktionen (Operatoren) beschreiben, die die gleichen Recheneigenschaften besitzen wie unser simples Flächenintegral. Und deshalb kann man das Flächenintegralwissen auch bei diesen komplizierten Aufgaben anwenden.)

Computerhilfe

(auch der Computer kennt nicht mehr Methoden zum Auffinden von Stammfunktionen als der Mensch, er beherrscht aber zusätzlich numerische Methoden um den Zahlenwertes des Integrals zu finden)

Zum Sprachgebrauch: früher (und unsere Schulbücher tun es immer noch) nannte man die Stammfunktion 'das unbestimmte Integral' und unser Integral 'bestimmtes Integral', woher der Befehl 'definite integral' in Maxima stammt.

Eine Stammfunktion:

Eigenmath: `integral(x^2-8x^3)`
Maxima: `integrate(x^2-8*x^3,x);`

Ein Integral:

Eigenmath: `defint(x^2-8x^3,x,1,3)`
Maxima: algebraisch: `integrate(x^2-8*x^3,x,1,3);`
numerisch: `defint(x^2-8*x^3,x,1,3);`

Integrationsmethoden

1.) Partialbruchzerlegung

Bei rationalen Funktionen kann man den Bruch mit Glück in eine einfachere Form bringen: Man faktorisiert den Nenner und setzt die Funktion aus Brüchen mit diesen Teilennern zusammen, ihr Zähler ist eine Zahl.

$$\begin{aligned}\int_a^b dx \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^3 - x^2} &= \int_a^b dx \frac{2x^3 - 2x^2}{x^3 - x^2} + \frac{-2x^2 + x - 3}{x^2 \cdot (x-1)} = \int_a^b dx 2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \int_a^b dx 2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x-1} = \\ &= [2x + 2 \ln(x) - \frac{3}{x} - 4 \ln(x-1)]_a^b\end{aligned}$$

In der Schule wenig wichtig, für 'echte' Mathematiker aber tägliches Brot. Lernen wir vermutlich nicht.

2.) Partielle Integration

Wir erinnern uns an die Produktregel des Differenzierens, formen sie um und integrieren auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (fg)' - fg' \\ \int_a^b dx f'g &= \int_a^b dx \partial_x (fg) - \int_a^b dx fg' \\ \int_a^b dx f'g &= fg \Big|_a^b - \int_a^b dx fg'\end{aligned}$$

Wir sehen links den Ableitungsstrich bei f, rechts bei g. Wir haben die Ableitung auf g übergewälzt.

Wann ist die Methode möglicherweise sinnvoll:

Wenn man bei einem Produkt von einem Faktor leicht die Stammfunktion findet und der andere Faktor beim Differenzieren nicht komplizierter wird.

Ich merke mir diese Methode gern so:

$$\int_a^b dx F'g = (Fg) \Big|_a^b - \int_a^b dx Fg'$$

Wir wollen $x \cdot \sin(x)$ integrieren. Sinus kann ich leicht integrieren, x auch. Aber x wird beim Differenzieren einfacher – deshalb ist das mein Kandidat für die Funktion g

$$\begin{aligned}\int_a^b dx x \cdot \sin(x) &= \int_a^b dx (-\cos(x))' \cdot x = -\cos(x) \cdot x \Big|_a^b - \int_a^b dx (-\cos(x) \cdot x') = -x \cdot \cos(x) \Big|_a^b + \int_a^b dx \cos(x) = \\ &= [\sin(x) - x \cos(x)]_a^b\end{aligned}$$

3. Substitution

Manchmal hilft ein Wechsel der Integrationsvariable (Physikalisch gesehen: man durchläuft das Intervall von a bis b mit einer anderen Geschwindigkeit). Wir ersetzen x durch eine Funktion t(x).

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{dx}{dt} f(t(x))$$

Du siehst beim rechten Integral den Kehrwert der Ableitung t'. Daraus folgt:

Diese Methode ist sinnvoll

- wenn die Ableitung t' sehr einfach ist

- wenn die Ableitung t' einen lästigen Term des Integranden wegekürzen kann

$$\int_4^8 dx \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = ?$$

Wir wählen den Inhalt der Wurzel als neue Funktion, da seine Ableitung $2x$ den Zähler verschwinden lassen wird.

$$t = x^2 - 4 \Rightarrow dt = 2x \cdot dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x} \text{ und die Grenzen werden } x=4 \Rightarrow t=12 \text{ wenn } x=8 \Rightarrow t=60$$

$$\int_4^8 dx \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \int_{12}^{60} dt \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{12}^{60} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{12}^{60} dt \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \Big|_{12}^{60} = \sqrt{t} \Big|_{12}^{60} = \sqrt{60} - \sqrt{12}$$

ODER wir substituieren am Schluss wieder zurück und setzen die ursprünglichen Grenzen ein. Damit ersparen wir uns das Umrechnen der Integralgrenzen.

$$\int_4^8 dx \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \int_{t(4)}^{t(8)} dt \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} = \dots = \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \Big|_{t(4)}^{t(8)} = \sqrt{t} \Big|_{t(4)}^{t(8)} = \sqrt{x^2-4} \Big|_4^8 = \sqrt{60} - \sqrt{12}$$

Folgerungen

$\int_a^b dx f(x) = \int_{a+C}^{b+C} dx f(x-C)$	Verschiebung der Variable	$\int_4^5 dx \sqrt{x+3} = \int_7^8 dx \sqrt{x}$
$\int_a^b dx f(x) = C \cdot \int_{\frac{a}{C}}^{\frac{b}{C}} dx f(C \cdot x)$	Skalierung der Variable	$\int_9^{12} dx \sqrt{\frac{x}{3}} = 3 \cdot \int_3^4 dx \sqrt{x}$

Die Formel für die Verschiebung ist oft brauchbar und unmittelbar einsichtig. Aber warum entsteht bei der Skalierung der Faktor C vor dem Integral? Ganz einfach – weil mit einer Vergrößerung von x auch eine Vergrößerung der Rechtecksstreifenbreite dx einhergeht. Das C kommt also von dCx her.

4. Reihenentwicklung

Diese Methode erfreut sich in der Physik größter Beliebtheit. Man entwickelt dabei den Integranden in eine Taylor- oder Laurin-Reihe und integriert diese als Summe von Potenzen.

Diese Reihenentwicklungen stehen aber nicht mehr im Lehrplan, deshalb betrifft Dich das nicht.

5. So – das war's

Außer einigen Spezialtricks für ganz besondere Fälle hast Du alle Methoden kennengelernt.

Ein nettes Spezialtrickbeispiel (nur zum Anstaunen, nicht zum Auswendiglernen): Wir wollen $\sin^2 x$ von 0 bis 2π integrieren (Querverbindung zur Physik: Leistung des Wechselstroms).

Weil in diesem Intervall Sinus und Cosinus, die sich ja nur durch eine Verschiebung unterscheiden, genau ein Mal enthalten sind, ergeben die Integrale über ihr Quadrat den selben Wert. Oder die Hälfte ihrer Summe. Aber die Summe von \sin^2 und \cos^2 kennen wir, die ist nach Pythagoras 1.

$$\int_0^{2\pi} dx \sin^2 x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx 1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

Oft erleichtert das Ausnutzen der Symmetrie einer Funktion das Rechnen beträchtlich!