# Extremwertaufgaben – was es so alles gibt

## 1. praktische Beispiele

Aufgabe:
Du musst Deine Mathe-Hausübung schreiben. Klarerweise willst Du die Arbeit möglichst effizient erledigen.

Lösung:
Dein Ziel ist es, die HÜ mit möglichst wenig Aufwand (**ZIELFUNKTION**) zu erledigen. In dieser Hinsicht wäre es möglicherweise am besten, die Arbeit gar nicht zu machen, das wäre maximaler Komfort und minimale Anstrengung. Leider geht das nicht, weil Du die HÜ ja schreiben willst (**NEBENBEDINGUNG**). Also versuchst Du herauszufinden, wie Du die HÜ optimal hinbekommst:
- Bald nach dem Unterricht beginnen (frisches Gedächtnis)
- Ohne Ablenkung (Musik abdrehen, Familienmitglieder ruhigstellen, Konzentration auf höchste Stufe schalten)
- Werkzeug bereithaben (Heft, Kugelschreiber,...)
- Erst denken, dann rechnen. Übersichtliche Schreibweise zeigt Übersicht im Kopf und erspart Suchen.

Und schon ist die HÜ erledigt.

**EXTREMWERTAUFGABE** =
1.) etwas soll optimiert werden (möglichst klein/schnell/billig/... sein) : **ZIELFUNKTION**
2.) etwas schränkt die Wahlmöglichkeiten für 1.) ein : **NEBENBEDINGUNG**

TIPS:
- Erste Frage: "Um was geht es?". Stell Dir die Situation bildlich vor.
- suche zuerst die Zielfunktion: was soll extrem werden ('möglichst groß', 'minimal',...).
- wähle zur mathematischen Formulierung passende Variable (was könnte man verändern).
- schreib auf, was die einzelnen Variablen bedeuten oder mach eine Skizze, in die Du sie einzeichnest
- wie kann man die Nebenbedingung mithilfe dieser Variablen formulieren?

## 2. Angabe einfach umformulieren

Aufgabe:
Die Summe zweier positiver Zahlen beträgt 25. Ihr Produkt soll möglichst groß sein. Wie lauten die beiden Zahlen?.
Oder:
Zerlege die Zahl 25 so in zwei positive Summanden, dass deren Produkt maximal ist.
Oder:
Welche beiden positiven Summanden der Zahl 25 ergeben das größte Produkt?

Lösung:

| Nebenbedingung | Zielfunktion |
|---|---|
| Summe der Zahlen ist 25<br>$a + b = 25$<br><br>$a = 25 - b$<br><br><br><br>$a = 25 - 12{,}5 = 12{,}5$ | erste Zahl: a<br>zweite Zahl : b<br>Produkt $P = a \cdot b \to \max$<br><br>$P(a,b) = a \cdot b \to \max$<br><br>$P(b) = (25-b) \cdot b = 25b - b^2 \to \max$<br><br>$\partial_b P = 25 - 2b = 0$ für Extremwert<br>$b = 12{,}5$ |

Durch das Einsetzen der Nebenbedingung liegt uns eine ganz einfache Funktion in einer einzigen Variable vor. Den Extremwert zu finden bedeutet nun denjenigen Wert der Variable zu finden, der die Ableitung der Funktion zu Null macht.
Also 1.) $\partial_b P$ ausrechnen und 2.) $\partial_b P = 0$ lösen. Dann bekommt man b.
Diesen Wert setzt man in die letzte Zeile der Nebenbedingung ein und erhält die zweite Variable.
Falls nötig testet man mit der zweiten Ableitung, ob es wirklich der verlangte Extremwert ist. Oder Du führst ein kluges Argument an (das ist der bessere Weg).
Im obigen Fall wäre die zweite Ableitung $\partial_b^2 P = -2$. Hier setzt man den soeben gefundenen Wert für b ein (was hier gar nicht nötig ist), stellt fest, dass die zweite Ableitung an dieser Stelle (hier sogar überall) negativ ist und hat somit das Vorliegen eines Maximums bewiesen.
Das bessere kluge Argument: für b=0 oder b=25 (die möglichen Randwerte) ist das Produkt Null. Dazwischen ist es immer positiv. Also kann ein Extremwert nur ein Maximum sein.

## 3. Die Angabe enthält sofort verwertbare Formeln

Aufgabe:
Ein oben offener Zylinder soll hergestellt werden, der V Liter Inhalt hat und eine möglichst kleine Oberfläche besitzt.

Lösung:

| Nebenbedingung | Zielfunktion |
|---|---|
| Volumen des Zylinders ist gegeben<br>$V(r,h) = r^2\pi h = V$ wir rechnen in dm<br><br>h = .... und in die Zielfunktion einsetzen | Zylinder Radius r, Höhe h<br>Ein Kreis plus Mantelrechteck<br><br>$O(r,h) = r^2\pi + 2r\pi h \rightarrow \min$ |

Ich hätte hier auch r ausdrücken können. Das hätte aber zu einer quadratischen Gleichung geführt und zu einer Wurzel. Das ist mir viel zu umständlich. Mathematiker lieben es einfach.
Informatiker bezeichnen das oft als das 'KISS'-Prinzip: sie sagen zum Anfänger, der alles sehr umständlich angeht, nur '**k**eep **i**t **s**imple, **s**tupid!'

Aufgabe:
Ein oben offenes quadratisches Prisma soll hergestellt werden, dessen Oberfläche A beträgt und das ein möglichst großes Fassungsvermögen hat.

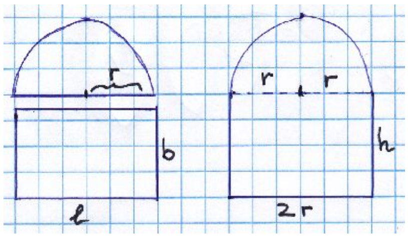
Lösung:

| Nebenbedingung | Zielfunktion |
|---|---|
| Oberfläche des Prismas ist gegeben<br>$A = r^2 + 4rh$<br><br>h = .... und einsetzen | Prisma Seiten a, Höhe h<br>Ein Kreis plus Mantelrechteck<br><br>$V(a,h) = a^2h \rightarrow \max$ |

## 3. Die Angabe enthält geometrische Informationen

Aufgabe:
Ein Kirchenfenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Es soll bei gegebenem Umfang (3 Meter) möglichst viel Licht durchlassen.

Lösung:
Das Rechteck hat Länge und Breite, der aufgesetzte Halbkreis muss mit seinem Durchmesser auf die Fensterbreite passen. Um Brüche zu vermeiden, wähle ich den Radius r und die Fensterhöhe h als Variable
Somit hat das Rechteck die Seitenlängen 2r und h.




| Nebenbedingung | Zielfunktion |
|---|---|
| Umfang = 3 Rechtecksseiten und ein halber Kreis<br>$U = 2r + 2h + r\pi$ | Gesamtfläche = Rechtecksfläche + Halbkreisfläche<br>$A(r,h) = 2r\,h + \frac{1}{2}\pi r^2$ |

## Skizzen für Einschreib- und Umschreibe-Aufgaben

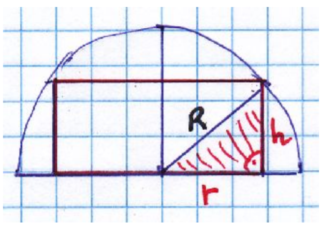
Dabei ist ein Berühren von zwei geometrischen Objekten gefordert.
Beachte bei der Skizze:
- rund in rund: Berührung entlang von Kreisen
- eckig in rund: Berührung nur an einzelnen Punkten (!!!Diagonalen!!!)
- rund in eckig: Berührung an Flächen
- eckig in eckig: Berührung von Ecken, eventuell von Seiten

In der Skizze sollte jede beteiligte Variable zu sehen sein. Geht es um Kreise und Kugeln muss daher immer deren Mittelpunkt im Bild zu sehen sein, bei Zylindern ihre Achse, usw.
Diese Überlegung zeigt Dir sofort, welchen Schnitt Du durch eine räumliche Konstruktion legen solltest.

## 4. Lehrsatz des Pythagoras

Wenn rechtwinklige Dreiecke vorliegen, von denen man alle Seiten beschriften (ohne Pythagoras zu verwenden) kann, oder wenn Berührpunkte auf einem Kreis bzw. einer Kugel liegen, kann man den pythagoreischen Lehrsatz anwenden.
Aufgabe:
In eine Halbkugel (Radius R) soll der inhaltsgrößte stehende Zylinder eingeschrieben werden.

Lösung

| Nebenbedingung | Zielfunktion |
|---|---|
|  <br>$R^2 = r^2 + h^2$<br>das Ausdrücken von h ist ungünstig, da dies zu einer Wurzel führt.<br>Da in der Hauptfunktion r nur quadriert auftaucht, genügt das Explizitmachen von $r^2$<br><br>$r^2 = R^2 - h^2$ | Zylinder Radius r, Höhe h<br>$V(r,h) = r^2\,\pi\,h$<br><br>$V(h) = (R^2 - h^2)\,\pi\,h$ |

**RECHENTRICKS:**
1.) Multiplikative Konstante für den ganzen Term darf man weglassen. (Grund 1: Ein Vervielfachen ändert nicht den Ort (Variable h) sondern nur die Höhe des Extremwerts. Wir sind aber nur an der Variable interessiert. Grund 2: so eine Konstante bleibt beim Differenzieren erhalten und wird später beim Nullsetzen der Ableitung weggekürzt werden. Warum nicht sofort weglassen?). Aufpasen: Minusse nicht ändern, sonst tauscht man Minimum gegen Maximum!
Ich bezeichne im Fall einer derartigen Vereinfachung die Zielfunktion mit einem veränderten Buchstaben, da es sich nun um eine andere Funktion (allerdings mit der gleichen späteren Lösung) handelt.

| | |
|---|---|
| | $V(h) = (R^2 - h^2)\,\pi\, h$<br>$\overline{V}(h) = (R^2 - h^2)\; h$ |

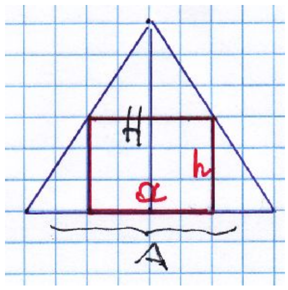
2.) anstatt diese Zielfunktion mittels Produktregel zu differenzieren ist es leichter, die Klammer auszumultiplizieren

| | |
|---|---|
| | $\overline{V}(h) = (R^2 - h^2)\; h$<br>$\overline{V}(h) = R^2 h - h^3$ |

3.) Ich habe mir angewöhnt, wenn möglich Groß- und Kleinbuchstaben für die Größen nach folgender Regel zu vergeben: Variable mit Kleinbuchstaben, fest vorgegebene Werte (Konstante) mit Großbuchstaben. Damit sehe ich beim Differenzieren auf einen einzigen Blick, was ist Konstante, was ist zu differenzierende Variable.

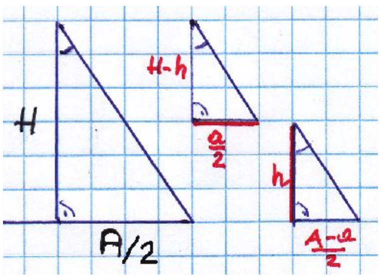
## 5. Ähnliche Dreiecke

Diese Art der Nebenbedingung vergleicht 'ähnliche Dreiecke': Das sind solche, die lauter gleiche Winkel haben und sich deshalb nur in den Seitenlängen unterscheiden. Doch dann sind die Verhältnisse zwischen entsprechenden Dreiecksseiten gleich.




Aufgabe:
In eine quadratische Pyramide (A,H) wird ein stehendes quadratisches Prisma (a,h) eingeschrieben, das maximalen Rauminhalt besitzen soll.

Lösung:
Die Figuren berühren oben entlang der Seitenkanten. Ich kann also den Schnitt parallel zu den Seiten wählen, statt diagonal zu denken (im letzteren Fall hätte ich überall eine Wurzel aus 2 dabei, die sich später wegkürzt)

<table>
<tr><th>Nebenbedingung</th><th>Zielfunktion</th></tr>
<tr><td>

Ein Vergleichsdreieck ist sicher das große, da es nur Konstante enthält.<br>Ob Du als zweites Dreieck das kleine oben oder das kleine rechts wählst, liegt bei Dir.<br>Probier beides aus, um den Unterschied zu sehen und Du wirst sehen, dass keiner zu sehen ist.<br><br>H : A/2 = (H-h) : a/2 als Bruch schreiben und kürzen<br>h = ......</td><td>Prisma: Seite a, Höhe h<br>$V(a,h) = a^2$</td></tr>
</table>