Extremwertaufgaben – die Grundidee

w.u. 04/2011

Paul möchte seinem Haserl 'Hasi' (vierbeinig) eine Osterfreude machen. Er hat 10 Meter Fertigzaun gekauft, mit dem er auf der Wiese ein rechteckiges Gehege für Hasi basteln will. Welche Maße sollte dieses Gehge haben, damit Hasi möglichst viel Wiesenfläche zur Verfügung hat?

Paul überlegt: Mit den 10 Metern Zaun könnte er ein Rechteck mit den Seitenlängen a=1 und b=4 erzeugen. Das ergäbe .... m^2 Flächeninhalt. Oder 0m und 5m ?. Oder ein Rechteck mit 2 und 3 Metern mit .... m^2 Fläche.
Das ist für Hasi sicher besser – aber welche Maße wären am allerbesten?
Mathematische Formulierung: Finde unter allen Rechtecken mit Seitenlängen a und b dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt, wobei der Umfang des Rechtecks vorgegebene U Meter beträgt.

Die **ZIELFUNKTION** (Hauptfunktion) ist hier der Flächeninhalt: A = a.b → max
NEBENBEDINGUNG ist der Umfang. Der Wert der Zielfunktion soll möglichst groß werden, die Nebenbedingung muss aber immer eingehalten werden. U = 2a+2b
U ist fest vorgegeben, a und b sind variabel, A wird maximal.

Wie können wir A zu einem Maximum machen? Das kennen wir doch schon – differenzieren und die erhaltene Ableitung gleich Null setzen. Aber nach welcher Variable? Leider haben wir hier zwei.
Allerdings sind a und b nicht frei wählbar – sonst wäre ja auch die Antwort 'riesengroßes a und riesengroßes b' für eine maximale Fläche korrekt. Durch den vorgegebenen Umfang muss aber b kleiner werden, wenn a wächst, da der Umfang des Rechtecks gleich bleiben muss. Umgekehrt kann b für ein kleineres a größer werden.
Diesen Zusammenhang können wir mathematisch ausdrücken: 2a + 2b = U = 10. Und weil dieser Zusammenhang hier immer erfüllt sein muss, können wir etwa b durch a ausdrücken und erhalten 2b = 10 – 2a bzw. b = 5 – a.
Wenn wir diesen Zusammenhang in die Flächenformel einsetzen, ergibt sich
$A = a.b = a.(5-a) = 5a - a^2$, und wir haben eine Funktion in einer einzigen Variable a vorliegen. Diese können wir wie gewohnt differenzieren!

Nebenbedingung	Zielfunktion
	$A = a \cdot b \;\rightarrow\; \max$
$2a+2b = U$ $2b = U-2a$ $b = \frac{U}{2}-a$	
	$A = a \cdot b = a \cdot (\frac{U}{2}-a)$
	$A = \frac{U}{2} \cdot a - a^2$ nur mehr eine Variable
	$\partial_a A = \frac{U}{2} - 2 \cdot a$
	$\partial_a A = 0$ suche den Extremwert
	$\frac{U}{2} - 2 \cdot a = 0$
	$\frac{U}{2} = 2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{U}{4}$ das ist das optimale a
$b = \frac{U}{2} - a = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \frac{U}{4}$	

Hasi bekommt von Paul daher einen optimalen quadratischen Laufstall mit Seitenlänge 2.5 m und Fläche A = 6.25 m^2 wird sich sehr freuen.

Bemerkung: theoretisch könnte diese Rechnung auch ein Minimum geliefert haben. Doch wir haben im Voraus überlegt, dass es einen 'mittleren' Maximalwert geben muss. Sehr kleine a oder b liefern auch eine kleine Fläche.
ODER für Freunde des Rechnens: zweite Ableitung von A berechnen, gefundenen Extremwert einsetzen und Vorzeichen des Ergebnisses überprüfen.