Differenzieren

Als Isaac Newton nachdachte, wie er die Bewegung von Objekten beschreiben könnte, um daraus physikalische Gesetzmäßigkeiten abzuleiten (seine drei Kraftgesetze), fehlten ihm dazu die mathematischen Werkzeuge. Um so einfache Sätze wie 'Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Ortes und die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit' präzise aufschreiben zu können, musste er eine Sprechweise der Mathematik erfinden. Er formulierte eine Theorie der 'Fluxionen' von physikalischen Größen, was einer exakten Formulierung des Wortes 'Änderung' entsprach. Er kennzeichnete diese Größen durch über den Variablennamen gesetzte Punkte. Physiker bevorzugen diese Schreibweise, wenn es um zeitliche Änderungen geht.

$$\dot{x}(t) = v(t) \;,\; \dot{v}(t) = a(t) \;,\; m \cdot a(t) = F(t)$$

Es wird Dich nicht wundern, dass Newton all diese Größen bereits als Vektoren aufgefasst hat. Sehr modern!

Zur gleichen Zeit fragte sich in Deutschland der Mathematiker Leibniz (nicht der Erfinder der beliebten Kekse) wie man rechnerisch Tangenten an den Graph einer Funktionskurve legen könnte. Auch ihm fehlten die dazu notwendigen mathematischen Rechenwerkzeuge, er musste eine neue Sprache (ein 'Kalkül') der Mathematik erfinden, das Rechnen mit 'winzig kleinen Größen' oder 'Differentialen'.

Wann hat die Tangente einen großen Anstieg? Wenn der Funktionsgraph steil ist, also sich die Funktionswerte stark ändern. Hier erfanden zwei Wissenschaftlern unabhängig voneinander dieselbe mathematische Theorie als Antwort auf zwei unterschiedliche Fragen!

In der Schule folgen wir dem Denkansatz und der Schreibweise von Leibniz (wir brauchen keine Physik dazu, die Idee ist leicht verständlich).

Frage: Wie ändern sich Funktionswerte

Wir wollen eine Methode entwickeln, mit der sich die 'Änderungsrate' von Funktionswerten beschreiben lässt. Wir wandern den Graphen mit wachsenden x-Werten ab. Intuitiv ist klar: bei steilen Funktionen ändern sich die Funktionswerte schnell, bei flachen langsam. Das zeigt auch eine Wertetabelle

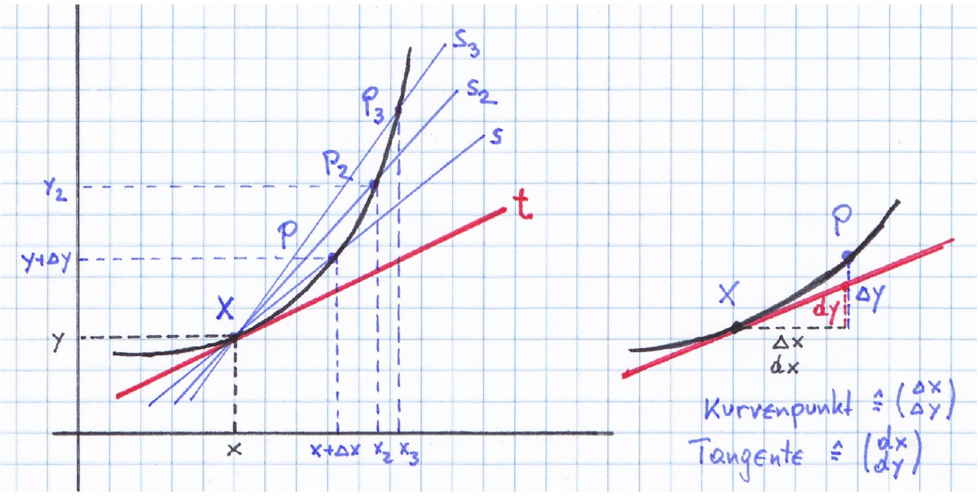
x	x^2	¼ x
2	4	1
4	16	2
6	36	3
8	64	4

Gehen wir mit x von 4 bis 6, ändern sich die Funktionswerte der ersten Funktion um 20, die der zweiten nur um 1. Die erste Funktion ist in diesem Bereich steiler als die zweite.

Bei gekrümmten Kurven ist es aber schwierig, ihren Anstieg zu bestimmen. Wollen wir das Verhalten in einem Punkt X(x/y) wissen, wäre es praktisch, die Kurve durch eine Gerade (sie hat konstanten Anstieg) zu ersetzen. Welche Gerade schmiegt sich am besten an die Kurve? Die Tangente!

Leibniz suchte also eine rechnerische Methode, den Anstieg der Tangente in einem Kurvenpunkt zu bestimmen.

Wir folgen seinen Ideen:



Wir können die Gleichung einer Gerade finden, wenn zwei ihrer Punkte bekannt sind. Das ist für die Sekanten s_3, s_2 und s möglich. Von der Tangente t kennen wir leider nur einen einzigen Punkt.

Welche der drei gezeichneten Sekanten ist der Tangente am ähnlichsten? Sicher s. Und warum? Weil ihr Punkt P am nächsten bei X liegt. Je näher wir P an X schieben, d.h. je kleiner wir den Abstand Δx wählen, desto ähnlicher wird die Sekante der Tangente, der Sekantenanstieg wird zum Tangentenanstieg.

Die mathematische Schreibweise für diese Idee, Δx immer kleiner und kleiner zu machen ist $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$. Also:

Für immer kleinere Δx wird der Sekantenanstieg $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer mehr zum Tangentenanstieg $\frac{dy}{dx}$ bedeutet

$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ist da ein Problem? Wenn wir die Sekante zur Tangente machen wollen, müssen wir Δx = 0 setzen. Aber dann hätte der Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Nenner Null, und das ist nicht berechenbar.

Leibniz erkannt, dass man mit ein paar Umformungen den Nenner loswerden (wegkürzen) kann und danach das Einsetzen der Null möglich wird. Und das funktioniert für viele Funktionen ganz einfach!

Wählen wir als Beispiel $f(x) = x^4$. Dann können wir (unter Verwendung der Formel für $(a+b)^4$ so umformen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \frac{[x^4+4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+6x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4]-x^4}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+6x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4}{\Delta x} = \frac{\Delta x\cdot[4x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x} =$$

$$= 4x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

Wir sind den Nenner tatsächlich losgeworden und können „winzig kleine“ Δx-Werte einsetzen. Im Grenzfall können wir Δx problemlos zu Null machen!

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 4x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 = 4x^3+6x^2\cdot 0+6x\cdot 0^2+0^3 = 4x^3$$

Das ist wirklich ein Erfolg! Wir konnten für jeden beliebigen Punkt $P(x/x^4)$ auf dem Graph der Funktion $f(x) = x^4$ den Anstieg der Tangente in diesem Punkt ermitteln, er beträgt $4x^3$. Und für alle Potenzfunktionen geht das genauso. Die entstandene Funktion $4x^3$ nennen wir die **Ableitungsfunktion f '(x)** von $f(x)=x^4$.

In Schulbüchern findest Du für den Sekantenanstieg häufig den Begriff '**Differenzenquotient**', für den Tangentenanstieg den Fachausdruck '**Differentialquotient**'. Lass Dich nicht verwirren – es sind trotzdem ganz gewöhnliche Brüche.

Zur Schreibweise:

Bilden wir aus einer Funktion f(x) ($y = f(x_0)$ sagt uns den Funktionswert an der Stelle $x=x_0$) die zugehörige Ableitungsfunktion $f'(x)$, dann sagt uns $k=f'(x_0)$ den Anstieg der Tangente an der Stelle x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =: \partial_x f(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Der Grenzwert 'limes' bedeutet: stell Dir vor, was rauskommt, wenn Δx ganz winzig klein wird. Der Bruch ist die Änderung des Funktionswertes, wenn sich x um ganz wenig ändert geteilt durch diese winzige Änderung.

Wir können den Prozess des Ableitungbildens (rechnerisch: des Differenzierens) als Operator auffassen, der aus einer Funktion eine andere macht.

der Differentialoperator $\partial_x f(x) \; : \; f(x) \to f'(x)$

wir haben oben gefunden, dass $\partial_x x^4 = 4x^3$ gilt. Ganz analog können wir dies für beliebige (vorerst ganzzahlige positive) Potenzen machen:

Potenzregel $\qquad \partial_x x^n = n x^{n-1}$

Wenn wir eine Potenz differenzieren, schreiben wir ihre Hochzahl als Faktor nach vorne und erniedrigen sodann die Potenz um eins.

Noch ein Beispiel um zu zeigen, wie leistungsfähig dieses Leibniz-Kalkül ist: Wir differenzieren die Quadraturzelfunktion. Ich lasse aus Bequemlichkeit den Limes weg, wir wissen, dass Δx ganz winzig klein ist und warten auf die Gelegenheit, Null dafür einsetzen zu können. Das ist unser Ziel.

$$\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \text{jetzt klappt es: } \Delta x \to 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wiederum war es geschicktes Umformen, das uns die Möglichkeit gab, den Nenner so zu verändern, dass die 'winzig kleine Größe' rechnerisch ungefährlich wird. Klar, x selbst darf nicht negativ sein und darf auch nicht Null sein, sonst stünde wieder Null im Nenner. Das gäbe ja dann einen unendlich großen Anstieg. Gibt's das? Mach eine Skizze der Wurzelfunktion und lass Dich überraschen...

Muss man jede Ableitung so kompliziert ausrechnen?

Wir können uns entspannt zurücklehnen – die Antwort ist NEIN.

Vor uns waren schon viele andere kluge Köpfe am Werk und haben die Ableitungen (das sag ich gern schlampig statt 'Ableitungsfunktionen') unserer grundlegenden Funktionen berechnet (was bedeutet: sie haben schlaue Umformungen gefunden, um den Nenner harmlos zu machen). Das alles kann man in Büchern nachlesen, auf denen 'Differentialrechnung', 'Analysis' oder englisch 'Calculus' draufsteht.

Noch was haben die klugen Köpfe uns schon vorbereitet: Aus den Grundfunktionen zusammengesetzte Funktionen, seien sie auch noch so kompliziert, lassen sich ebenfalls differenzieren. Und alles dazu Notwendige lässt sich in ein paar Regeln zusammenfassen.

Tip: Wer das Differenzieren wirklich 'verstehen' will, muss diese Tricks einmal geistig nachvollziehen. Erst dadurch bekommt man ein 'Gefühl' für die Mathematik und sie ist nicht nur vorschriftsgemäße Herumrechnerei... Frag Deinen Mathelehrer. Sei sicher – Verständnisfragen machen ihn glücklich.

Hier biete ich Dir aber nur die fertigen Tabellen an:

Tabelle einiger Ableitungen

	Funktion	**ihre Ableitung**
! Konstante	$const$	0
	x	1
	x^2	2x
	x^3	$3x^2$
! Potenz	x^n	$n \cdot x^{n-1}$, $n \neq 0$
	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
! Winkelfunktion	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
! Exponentialfkt.	e^x	e^x
! Logarithmus	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Nur die mit einem Rufzeichen versehenen Formeln sind grundlegend, die übrigen einfache Folgerungen daraus. Die wichtigen **muss** man auswendig können (genauso wie man nur Vorteile hat, wenn man die Formel für die quadratische Gleichung auswendig kann).

Ableitungsregeln

$(\alpha \cdot f)'$	$=$	$\alpha \cdot f'$	Vielfaches
$(f \pm g)'$	$=$	$f' \pm g'$	Summe und Differenz
$(f \cdot g)'$	$=$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	Produkt
$(\frac{f}{g})'$	$=$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	Quotient
$(f(g(x)))'$	$=$	$f'(g(x)) \cdot g'$	Kettenregel

Auch diese Regeln muss jeder ernstzunehmende Mathematiker – auso auch Du – auswendig kennen und ANWENDEN KÖNNEN!

Beispiele zur Anwendung:

$$(4x^3+666)' = \text{(Summenregel)} = (4x^3)'+(666)' = (\mathit{Konstante}) = (4x^3)'+0 = \text{(Vielfaches)} =$$
$$= 4\cdot(x^3)' = \text{(Potenz)} = 4\cdot 3x^2 = 12x^2$$

$$(x\sin x)' = (x\cdot\sin(x))' = \text{(Produktregel)} = x'\cdot\sin(x)+x\cdot(\sin(x))'$$

Die Strichelei beim Sinus ist lästig. Machen wir es wie bei den Hochzahlen: sin'x bedeutet (sin x)' und das ist das gleiche wie (sin(x))'. Bei den Hochzahlen war es in der 5. Klasse genauso. Also nochmal

$$(x\sin x)' = \text{(Produktregel)} = x'\cdot\sin x+x\cdot\sin' x = 1\cdot\sin x+x\cdot\cos x = \sin x+x\cos x$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \text{(Quotientenregel)} = \frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Wie merkt man sich das mit dem Minus? Es kommt dann, wenn der Nenner abgeleitet wird. Klar – Nenner bedeutet ja als Potenzen die Hochzahl -1, und genau die taucht hier auf.

$$(\sin^2 x)' = (\sin x)^{2\,\prime} = \text{außen steht hoch 2} = 2(\sin x)^1\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cdot\cos x$$

Zuerst die äußere Funktion behandeln, ganz egal was drinsteht. Das was drinsteht bleibt auch drin stehen. Dann mal der Ableitung von dem, was drinsteht (innere Ableitung).

Zum Vergleich

$$(\sin x^2)' = (\sin(x^2))' = \text{außen steht der Sinus} = \cos(x^2)\cdot(x^2)' = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2$$

$$(e^{\sin x})' = (\exp(\sin x))' = \text{außen steht e hoch x} = (\exp(\sin x))\cdot(\sin x)' = (\exp(\sin x))\cdot\cos x = \cos x\, e^{\sin x}$$

So viel zum Rechnen mit Ableitungen. Wozu man sie wirklich braucht und was sie alles können – das folgt in Kürze.

Noch ein Wort zur Schreibweise: so lange man klar erkennen kann, was Du meinst, ist alles legal.
Sei f(x) = cos x.

$$f'(x)=-\sin x, \quad \frac{df}{dx}=-\sin x, \quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x, \quad d\cos x=-\sin x\,dx, \quad \partial_x\cos x=-\sin x$$

Alle Schreibweisen sind gut, die beiden letzten sogar sehr gut.

Ergänzung für Lehrer – es gibt bessere Wege

Man kann die Differenzialrechnung auch ganz anders, und wie ich finde, mathematisch sehr viel klüger angehen.

Das war doch die Leibniz-Idee: Finde die Gerade, die in der lokalen Umgebung eines Kurvenpunktes die Kurve bestmöglich annähert.

Gerade sind lineare Funktionen. Berechnen wir einfach die Änderung der Werte, greifen uns die linearen Bestandteile (Differenzen) heraus und interpretieren sie als Tangentenrichtung (Differential).

Dazu gehen wir von einer Kurve aus, die wir in der Form z(x,y) = c schreiben. In Worten: alle Punkte (x/y) auf der Kurve erfüllen diese Gleichung, diese Gleichung ist zwingt x und y auf die Kurve.

Z.B.

Kreisgleichung	$z(x,y) = x^2 + y^2 = 16$
Hyperbel	$z(x,y) = 4x^2 - 3y^2 = 12$
Lemniskate	$z(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$
Funktion	$z(x,y) = y - f(x) = 0$

Ja, da geht viel mehr als nur Funktionen. Es gibt echt coole 2D-Kurven! (Frag mal das Internet.) Das sind aber alles keine Funktionskurven.

Beispiel:

$y = \sqrt{x+4}$ $y^2 = x+4$ $z(x,y):\ y^2 - x = 4$	Die Wurzelfunktion schöner gemacht als Kurvengleichung für den Punkt X(x,y)
$z(x+\Delta x, y+\Delta y):\ (y+\Delta y)^2 - (x+\Delta x) = 4$ $y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - x - \Delta x = 4$	Das gleiche für einen Kurvenpunkt knapp daneben vereinfacht
$z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y):$ $(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - x - \Delta x) - (y^2 - x) = 4 - 4$	Wir bilden die Differenz und vereinfachen
$2y\Delta y - \Delta x \quad + \Delta y^2 = 0$ $2y\,dy - dx = 0$	das bleibt übrig, wir setzen die Differentiale ein und behalten nur die linearen Anteile

Wer will, darf statt der letzten Zeile auch gern $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$ schreiben. Oder $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

Liebe Kollegen – was ist für Schüler leichter verständlich, der Grenzwert oder die Differenzbildung? Ich hab die Wurzel mit Grundrechenarten differenziert. Ihr braucht das volle Potenzrechnen.

P.S. Natürlich ist beides das gleiche. Aber obige Methode braucht keine Grenzwerte und zu vermeidende Divisionen durch Null. Und außerdem kann dies Methode VIEL MEHR, als nur Funktionen differenzieren. Zum Beispiel wird ein Zusammenhang wie $z(x,y) = c \quad \rightarrow \quad dz = u \cdot dx + v \cdot dy$ unmittelbar einsichtig, die Variablen x und y sind endlich gleichberechtigt, wir rufen in der Vorstellung des Schülers genau das Bild hervor, das man in der Physik beim Rechnen mit infinitesimalen Größen braucht. Die Tatsache, dass man mit Differentialen rechnen kann, wird im Unterricht ganz vernachlässigt.

Falls der Einwand brennt, dass hier doch einiges nicht ganz exakt sei – stimmt. Leibniz hatte nicht einmal eine Definition, was eine Funktion ist. Er hielt jede Funktion für differenzierbar und wurde trotzdem berühmt. Ich überlege mir Knick- und Sprungstellen lieber anhand einer Skizze. Ich glaube nicht, dass eine berechnete Diskrepanz zwischen dem rechtsseitigen und linksseitigem Differentialgrenzwert Erkenntnis bringt.

Schade, dass in den neuen 'Kompetenzen' der Begriff Differenzialquotient vorkommt. Es lebe der Konservativismus.