

Binomial- und hypergeometrische Verteilung

Laplace-Experimente (Gleichverteilung):

Oft gilt, dass alle Einzelereignisse (Elementarereignisse) eines Experimentes 'gleich häufig auftreten' – keines ist bevorzugt, keines benachteiligt, alle gleichberechtigt.

Beispiele: a) die Augenzahlen eines geworfenen Würfels, b) die Seiten einer geworfenen Münze, c) die einzelnen Zahlen einer endlichen Zahlenmenge, d) die Karten eines Kartenspiels ohne doppelte Karten,...

Besitzt der Ereignisraum n Elemente, so besitzt jedes Element die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$

(Beim Würfeln $1/6$, bei der Münze $1/2$, bei einem vollständigen Kartenspiel $1/52$,...)

Allgemein: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit genau r Einzelementen ist dann $r \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$

$$P(X) = \frac{\text{Anzahl der für X günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Aufgaben: berechne jeweils die Wahrscheinlichkeiten

- beim Wurf eines Würfels erscheint eine gerade Zahl
- beim Ziehen aus einem Kartenspiel (52 Karten) erscheint ein König
- beim Werfen zweier Würfel erscheint die Summe 4
- bei zwei Würfeln eines Würfels erscheint die Summe 4

($3/6 = 1/2$, $4/52 = 1/13$, $3/36 = 1/12$, das selbe)

Binomialverteilung

Ein Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen (Ausgängen), wir nennen sie „Erfolg“ und „Misserfolg“, wird mehrmals durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Erfolges sei p , die Wahrscheinlichkeit des Misserfolges ist dann $q = 1-p$. (Bernoulli-Experiment)

Die Wahrscheinlichkeit von genau k Erfolgen bei n Wiederholungen eines Experimentes mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist

$$P(k; n, p) = B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Aufgaben: berechne jeweils die Wahrscheinlichkeiten

- beim fünfmaligen Wurf eines Würfels erscheint zwei mal die 3
Kontrolle mit Maxima: einmalig `load(distribution)` ;
dann `pdf_binomial(2, 5, 1/6)` ; (probability density function)
in Eigenmath zuerst (einmalig) die Verteilung definieren
`bin(k, n, p) = choose(n, k) * p^k * (1-p)^(n-k)`
`bin(2, 5, 1/6)` und die 'float'-Taste
- bei 10 Würfeln einer Münze erscheint 5 mal 'Zahl'
- bei 10 Würfeln einer Münze niemals 'Kopf'
- die Wahrscheinlichkeit, ein neues Tanztalent zu entdecken, ist 10%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 10 Kandidatinnen a) ein b) 2 oder 3 c) kein Talent zu entdecken?
- ein Würfel wird 10 mal geworfen. a) beim ersten Mal erscheint '6', b) ein Mal erscheint '6', c) mindestens ein Mal erscheint '6', d) höchstens ein Mal erscheint '6'

(0.16075, 0.2461, 1/1024 etwa 1 Promill, 38.74% 19.37%+5.74% 34.87%, 1/6 32.3% 83.85% 16.15%+32.3%)

Eigenschaften

Liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable X vor, kann man fragen, was wohl der wahrscheinlichste Ausgang ist: der Erwartungswert $E(X)$ bzw. der Mittelwert μ .

Weiters kann man nach der Streuung der Werte um diesen 'mittleren' Wert fragen: die Varianz σ^2 , die Standardabweichung σ

Für die Binomialverteilung gilt bei n Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beachte: aus n und p kann man μ und σ berechnen, aus μ und σ folgen n , p und q .

Mit $\sigma^2 = npq = \mu \cdot q$ erhält man $q = \frac{\sigma^2}{\mu}$ und damit $p = 1 - q$ und $n = \frac{\mu}{p}$

Die Binomialverteilung beschreibt folgende typische Situationen.

- Ein Versuch wird unabhängig voneinander n mal wiederholt. Der Ausgang eines Einzelversuchs hat keinerlei Einfluss auf die übrigen Versuche. Die einzigen beiden möglichen Ausgänge können als *Erfolg* und *Misserfolg* bezeichnet werden. Ihre Wahrscheinlichkeit ist im ganzen Verlauf gleich (Erfolg p , Misserfolg $q = 1-p$).
- Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen. In einer Urne liegen rote Kugeln (Anteil p) und schwarze Kugeln (Anteil $q=1-p$). Nun werden nacheinander n Kugeln gezogen: jedes mal wird die Farbe notiert, dann die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt (**mit Zurücklegen**, d.h. mit Wiederholung). Die Wahrscheinlichkeit, genau k mal eine rote Kugel (d.h. eine der roten Kugeln) zu erwischen ist $B(k; n, p)$.
- Bei einer laufenden Produktion entstehen zufällig und voneinander unabhängig defekte Teile (es gibt keine Zusammenhänge zwischen den Fehlern, keinen Trend, keine Systematik). Aus der Produktion werden n Teile als Stichprobe entnommen. Ist p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil defekt produziert wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit, genau k defekte Teile in der Stichprobe vorzufinden, $B(k; n, p)$.

Aufgaben:

- Ein Würfel wird 600 mal geworfen. Berechne den Erwartungswert für das Ereignis 'Augenzahl 4' und die Streuung. Ein Würfel wird getestet und zeigt 107 mal einen 4er. Hältst Du diesen Würfel für 'fair'? Ein anderer Würfel zeigt 87 mal einen 4er. Was sagst Du zu ihm?
- Eine Maschine stellt Spezialnägeln her. Durchschnittlich sind 2 von 30 Nägeln defekt. Berechne, wie viele defekte Nägel in einer Produktion von 1000 Stück 'normalerweise' auftreten (gesamter Bereich!)
- In einem Land gibt es jährlich etwa 70 Regentage. Ein Urlauber hat das Pech, in zwei Wochen 4 Regentage zu erleben. Ist das erstaunlich oder 'normal'?

(100 ± 9.129 91 bis 109, $2/30 * 1000 = 66.7 \pm 7.9$, $70/365 = 0.192$ $4/14 = 0.286$ also Pech gehabt)

Hypergeometrische Verteilung

Sie entspricht in gewisser Weise der Idee der Binomialverteilung, doch wird hier **OHNE ZURÜCKLEGEN** gezogen.

Wir haben r rote und s schwarze Kugeln, $N = r+s$ ist die Gesamtanzahl der Kugeln. Nun wird n mal ohne Zurücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, genau k rote Kugeln zu ziehen ist In Maxima: `pdf_hypergeometric(k, r, s, n)`

$$P(k; N, r, n) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Aufgaben:

- In einer Obstkiste liegen 50 Äpfel, 10 von ihnen sind wurmstichig. Man nimmt zufällig 2 Äpfel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein wurmstichiger dabei ist?

$$H(0\text{ schlechte}) + H(1\text{ schlechter}) + H(2\text{ schlechte}) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{50}{2}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{40}{0}}{\binom{50}{2}}$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man beim Lotto 6 aus 45 einen 4er? (Lösung: 0.00136463)

Zum Üben empfehle ich Dir Maxima oder Eigenmath: für eine Antwort in Prozent

Maxima: `binomial(6,4)*binomial(39,2)/binomial(45,6)`
`100*float(%)`

Eigenmath: `100*float(choose(6,4)*choose(39,2)/choose(45,6))`

- Lotto 6 aus 45: wir haben 6 rote Kugeln (die richtigen Zahlen) und 39 schwarze Kugeln (falsche). Berechne die Wahrscheinlichkeiten für 0,1,2,3,4,5,6 'richtige'.
 Frage: Wir bieten eine Trostpreis-Versicherung an: Für einen Einsatz von 1 € erhält ein Spieler, der Null richtige hat, 2 €, also seinen doppelten Einsatz, ausbezahlt. Können wir uns dieses Angebot leisten oder machen wir Verlust? Vergleiche die Wahrscheinlichkeit, 0 richtige zu haben (40,056% in Ö, 43,6% in D), mit der Wahrscheinlichkeit, mindestens eine richtige Zahl zu haben.

- Die Prüfungsvorschrift für eine Lieferung, die höchstens 10% Ausschuss enthalten darf, lautet: Jeder 50-Stückpackung sind 5 Stück zu entnehmen und zu prüfen. Wenn alle diese 5 Stück in Ordnung sind, ist die Packung anzunehmen, andernfalls abzulehnen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe mindestens ein fehlerhaftes Stück enthält, wenn die Lieferung tatsächlich 10% Ausschuss enthält?

$$1 - H(0\text{ schlechte}) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{5}}$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung, die 7 fehlerhafte Stück enthält, trotzdem angenommen wird?

$$H(0\text{ schlechte}) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{43}{5}}{\binom{50}{5}}$$

Verallgemeinerung bzw. leichter zu merkende Formeln:

HYPERGEOMETRISCH

Sind R,G,B,W rote, grüne, blaue und weiße Kugeln (zusammen N) vorhanden und wir ziehen r, g, b, w rote, grüne, blaue und weiße (insgesamt n) OHNE ZURÜCKLEGEN, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür

$$P = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{G}{g} \cdot \binom{B}{b} \cdot \binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}$$

BINOMIAL

Es sind rote, grüne, blaue und weiße Kugeln vorhanden. Die Wahrscheinlichkeiten, jeweils eine davon zu ziehen, betragen p_R , p_G , p_B und p_W (die Summe beträgt 1) Die Wahrscheinlichkeit, genau r rote, g grüne, b blaue und w weiße (insgesamt n) MIT ZURÜCKLEGEN zu ziehen ist

$$P = \frac{n!}{r! \cdot g! \cdot b! \cdot w!} \cdot p_R^r \cdot p_G^g \cdot p_B^b \cdot p_W^w$$

Bem.: Sind R,G,B,W rote, grüne, blaue und weiße Kugeln (zusammen N) vorhanden, so sind obige

Einzelwahrscheinlichkeiten einfach $p_R = \frac{R}{N}$, $p_G = \frac{G}{N}$, $p_B = \frac{B}{N}$, $p_W = \frac{W}{N}$. Die Zahl N tritt in der Formel nicht auf, da wir mit Zurücklegen ziehen und deshalb nicht die absoluten Anzahlen, sondern nur die relativen Anteile eine Rolle spielen.

Aufgaben:

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 8 Würfeln eines Würfels vier 1er, drei 4er und einen 5er zu bekommen. Zeichne ein Histogramm.
- In einer Kiste sind 15 Kugeln. vier mit Beschriftung "1", fünf mit Beschriftung "4" und sechs mit der Beschriftung "5". Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, viermal "1", dreimal "4" und einmal "5" zu erhalten, wenn man 8 Kugeln herauszieht?

$$P = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \quad P = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{15}{8}}$$

Das 'Paradebeispiel' für die hypergeometrische Verteilung ist das **Lotto**. In Österreich werden 6 Zahlen von 45 möglichen gezogen, sowie eine weitere Zahl als Zusatzzahl. In Deutschland werden 6 aus 49 Zahlen gezogen, sowie eine Zusatzzahl. Die deutsche 'Superzahl' ist die letzte Ziffer der Spielquittung (also 1 von 10 Möglichkeiten für die 6er-Gewinner)

Die von den Spielern eingezahlte Geldsumme wird nur zu 48,8% (in Deutschland zu 50%) wieder als Gewinn ausgeschüttet. Die restliche Hälfte bekommen der Finanzminister (deshalb kann man 'steuerfreie' Spielgewinne versprechen – die Steuer ist ja bereits bezahlt), die veranstaltende Gesellschaft (Verwaltung und Durchführung des Spiels – obwohl in der Tippscheingebühr bereits etwa 10 Cent Verwaltungskostenbeitrag enthalten ist, weiters das Honorar für die Annahmestellen, ein Löwenanteil für die Bewerbung des Spiels in ORF, Zeitungen und auf Plakaten, Ziehung im Fernsehen,...), sowie ein kleiner (moralischer) Teil für kulturelle und sportliche Subventionen.

Die Aufteilung des Geldes auf die einzelnen 'Gewinnränge' wird von der Lottogesellschaft vorgegeben. Man achtet z.B. darauf, dass ein 5er mehr Geld bringt als ein 4er (Zusatzregeln sollen das auch sicherstellen, wenn sich etwa wenige 4er-Gewinner und viele 5er-Gewinner jeweils den Gesamtbetrag des Ranges teilen). Ein 'Ausgleichstopf' wird von der Gesellschaft frei verwaltet und sorgt dafür, dass etwa für den 1. Rang immer mindestens eine Million ausgezahlt werden kann.

	Rang (Gewinn- klasse)	Möglichkeiten Österreich	Ausschüttung Österreich	Rang (Gewinn- klasse)	Möglichkeiten Deutschland	Ausschüttung Deutschland
6er+Superzahl	-	-		1	0,1	10%
6er	1	1	40%	2	0,9	8%
5er+Zusatzzahl	2	6	5,5%	3	6	5%
5er	3	228	6%	4	252	13%
4er+Zusatzzahl	4	570	2,1%	5	630	2%
4er	5	10545	9,9%	6	12915	10%
3er+Zusatzzahl	6	14060	4,8%	7	17220	8%
3er	7	168720	17,6%	8	229600	44%
0er+Zusatzzahl	8		(ca. 12,6%) je 1,10€			

Die Anzahl der Möglichkeiten kannst Du mithilfe der hypergeometrischen Verteilung leicht nachrechnen.

Bsp. 5er mit Zusatzzahl: 5 von 6 richtigen, 0 von 38 falschen, 1 von 1 Zusatzzahl : Eigenmath: $\text{choose}(6,5) \cdot \text{choose}(38,0) \cdot \text{choose}(1,1)$
 Bsp. 5er ohne Zusatzzahl: 5 von 6 richtigen, 1 von 38 falschen, 0 von 1 Zusatzzahl : Eigenmath: $\text{choose}(6,5) \cdot \text{choose}(38,1) \cdot \text{choose}(1,0)$

Denkfragen: ist das Lottospiel als Einnahmequelle zu empfehlen für a) Einzelspieler, b) Spielgemeinschaften, c) ganz Österreich, d) den Finanzminister, e) die veranstaltende Gesellschaft und ihre Partner (ORF,...) ?
 Warum sind private Glücksspiele verboten? Kann man das Lottoglück mit mathematischem Wissen erhöhen?
 Kann man die Gewinnsumme im Gewinnfall mit mathematischem Wissen erhöhen?