Volumen und Oberfläche der n-dimensionalen Hyperkugel

- Die folgenden Rechnereien sind nur für Schüler der 8. Klassen nachvollziehbar, da man den Integralbegriff, sowie partielles Integrieren und Substitution kennen muss. Auch sollte man bereits etwas über den Dimensionsbegriff nachgedacht haben.
- Wir werden die Vorsilbe 'Hyper' meist weglassen und die Begriffe 'Kugel' und 'Würfel' einfach ganz allgemein fassen.
- Für das Volumen eines n-dimensionalen Körpers schreiben wir V_n, für seine Oberfläche O_n.
- **Erinnerung:** Was bedeutet eigentlich der Begriff 'Volumen': die Maßzahl des n-Volumens gibt an, wie viele n-Einheitswürfel in diesem Körper Platz finden können.

Der n-dimensionale (Hyper)würfel

Er entsteht aus einem (n-1)-dimensionalen Würfel der Kantenlänge A (Raumrichtungen x,y,...,z), indem man diesen in einer auf die bisherigen Raumachsen senkrechten Richtung u um A Einheiten verschiebt. Sein Volumen könnte man mittels Integration berechnen:

$$V_n = \int_0^A V_{n-1}(x,y,...z)\,du = \iiint_0 (x\cdot y\cdot\ldots\cdot z)\,du = A^{n-1}\int_0^A du = A^n \quad (=V_{n-1}\cdot A)$$

Das ist aber eigentlich überflüssig, da der Einheitswürfel immer Volumen 1 besitzt (definitionsgemäß) und eine Vervielfachung aller n Seitenlängen um den Faktor A eine Vervielfachung des Volumens um den Faktor A^n zur Folge hat.

Die n-dimensionale (Hyper)kugel

Wir werden die Berechnung in mehreren abgegrenzten Teilschritten durchführen. Das erleichtert den Überblick.

Das folgende Resultat werden wir später benötigen:

Berechne $C_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

Das erledigen wir mittels partieller Integration:

$$\int \cos^n t\,dt = \int (\sin t)'\cdot\cos^{n-1} t\,dt = \sin t\cos^{n-1} t - \int (\sin t)\cdot(n-1)\cos^{n-2} t(-\sin t)\,dt =$$

$$\sin t\cos^{n-1} t + (n-1)\int \sin^2 t\cdot\cos^{n-2} t\,dt = \sin t\cos^{n-1} t + (n-1)\int (1-\cos^2 t)\cdot\cos^{n-2} t\,dt =$$

$$\sin t\cos^{n-1} t + (n-1)\int \cos^{n-2} t\,dt - (n-1)\int \cos^n t\,dt$$

Nun fällt uns auf, dass der $\cos^n$ – Term ja der zu berechnende ist und ziehen links zusammen:

$$n\int \cos^n t\,dt = \sin t\cos^{n-1} t + (n-1)\int \cos^{n-2} t\,dt$$

Betrachten wir die Grenzen -π/2 und π/2. Der erste Term auf der rechten Seite ist beide Male Null (Cosinus von

+-90°) und kann weggelassen werden. Wir erhalten

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt = \frac{n-1}{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\, dt$$ und erkennen links C_n und rechts C_{n-2}!

Der Grad wurde also um 2 reduziert und wir erhalten die rekursive Vorschrift: $C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$

und die ersten beiden Werte sind $C_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \pi$, $C_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = 2$

Für das Integral $C_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$ gilt $C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$ *wenn* $n \geq 2$, $C_0 = \pi$, $C_1 = 2$

weitere Werte sind $C_2 = \frac{1}{2}\pi,\ C_3 = \frac{4}{3},\ C_4 = \frac{3}{8}\pi,\ C_5 = \frac{1}{15},\ C_6 = \frac{5}{16}\pi,\ \ldots$

Nun können wir uns endlich dem Volumen der Kugel zuwenden:

Eine n-Kugel mit Radius R ist bekanntlich definiert als Punktmenge (x,y,...,z,u) für die gilt : $x^2+y^2+.....+z^2+u^2 \leq R^2$ (Pythagoras). Schneiden wir so eine Kugel senkrecht zur Achse u mit einer (n-1)-Ebene, so erhalten wir als Schnitt eine (n-1)-Kugel, deren Radius $r = \sqrt{R^2 - u^2}$ misst.
(Am besten für n=3 mit Koordinaten x, y, u aufzeichnen! Wir schneiden eine 3D-Kugel waagrecht mit einer Ebene und ziehen diese Ebene in Richtung u von unten nach oben. Die Schnittfigur ist ganz unten (u=-R) ein Kreis mit Radius r=0, dann wächst der Radius r, bis er in der Mitte (u=0) zu R wird, dann nimmt er wieder bis 0 ab.)

Also berechnen wir das Volumen der n-Kugel mit Radius R als Summe der Volumina von (n-1)-Kugeln mit obigem Radius r. Diese besitzen ein Volumen $V_{n-1}(r)$, das wir als $V_{n-1}(1)r^{n-1}$ oder einfach $V_{n-1}r^{n-1}$ schreiben. V_{n-1} ist dann ein reiner Zahlenfaktor und kann aus dem Integral herausgenommen werden.

$$V_n(R) = V_n R^n = \int_{-R}^{R} V_{n-1}(r)\, du = \int_{-R}^{R} V_{n-1}(1) r^{n-1}\, du = V_{n-1} \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-u^2}^{\,n-1}\, du$$

Wie immer beim Auftreten dieser Wurzel substituieren wir $u = R\sin\alpha$, $du = R\cos\alpha\, d\alpha$ mit den Grenzen -π/2 und π/2 und erhalten

$$V_n(R) = V_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R\cdot\cos\alpha)^{n-1} R\cdot\cos\alpha\, d\alpha = V_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^n \cdot \cos^n\alpha\, d\alpha = V_{n-1} R^n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\alpha\, d\alpha$$

Das verbleibende Integral entspricht aber genau dem im Vorfeld berechneten Wert C_n!

Damit erhalten wir für die n-dimensionale Einheitskugel:

$V_n = C_n \cdot V_{n-1}$ mit $V_1 = 2$ und können damit alle Volumina der Reihe nach berechnen!

Die n-dimensionale Hyperkugel mit Radius R hat das Volumen $V_n(R) = V_n R^n$, wobei für V_n die folgende Rekursion gilt: $V_n = C_n \cdot V_{n-1}$ mit $V_1 = 2$

Versuchen wir nun diese Rekursion aufzulösen um explizite Formeln zu erhalten.

Dazu schreiben wir unsere eben erhaltenen Rekursionsvorschrift etwas weiter aus:
$V_n = C_n \cdot V_{n-1} = C_n \cdot C_{n-1} \cdot V_{n-2} = C_n \cdot C_{n-1} \cdot C_{n-2} \cdot V_{n-3} = \dots = C_n \cdot C_{n-1} \cdot C_{n-2} \cdot C_{n-3} \cdot \ldots \cdot C_2 \cdot V_1$
Es läuft also darauf hinaus, dass wir das Produkt aller C_n bis zu C_2 hinunter bilden!

Deren Rekursionsvorschrift erniedrigte den Index jeweils um 2. Wir können also C_nC_{n-1} zu einem Ausdruck in $C_{n-2}C_{n-3}$ umformen. Die beiden Faktoren stehen aber bereits da, sie werden also quadratisch. Dieses Spiel treibt man weiter, $C_{n-4}C_{n-5}$ kommen dann hoch drei vor,... Wir erhalten also Paare von gleich zu behandelnden Größen. Die sich zusätzlich ergebenden Zahlenfaktoren wollen wir nun untersuchen:
Für ein einzelnes Paar erhalten wir
$$C_m C_{m-1} = \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m-1} C_{m-2} C_{m-3} = \frac{m-2}{m} C_{m-2} C_{m-3}$$
Und für das ganze Produkt:
$$C_n \cdot C_{n-1} \cdot C_{n-2} \cdot C_{n-3} \cdot C_{n-4} \cdot C_{n-5} \cdot \ldots \cdot C_2 \cdot V_1 = \dots$$
Beachte beim explizit Anschreiben und Kürzen: je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist, kann man anders zusammenfassen!

Alternativ

Wir haben rekursive Formeln erhalten, die in Zweierschritten zu kleineren Dimensionen wechseln. Wenden wir das Cavalierische Prinzip aber so an, dass wir gleich zwei Variable herausziehen (also nicht entlang einer Linie sondern über eine Kreisfläche integrieren), erhalten wir ohne viel Rechenarbeit hübschere Rekursionsformeln. Dabei substituieren wir $u^2 + v^2 = r^2$.

$$V_n(1) = \iint_{u^2+v^2 \le r^2} V_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})\, du\, dv = 2\pi \int_0^1 V_{n-2}(\sqrt{1-r^2})\; r\, dr = 2\pi \int_0^1 V_{n-2}(1)(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\; r\, dr =$$
$$2\pi V_{n-2}(1) \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\; r\, dr = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$$

und damit

Volumen und Oberfläche der n-dimensionale Hyperkugel (n=1,2,3,...) :

$$V_n(R) = \frac{S_n}{n} \cdot R^n \;, \quad O_n(R) = \frac{dV_n(R)}{dR} = S_n \cdot R^{n-1}$$
$$S_{n+2} = \frac{2\pi}{n} S_n \;, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 2\pi$$

Einige Beispiele:

Dimension	**Volumen V_n**	**Oberfläche O_n**
1	$V_1 = 2R$	-
2	$V_2 = \pi R^2$	$O_2 = 2\pi R$
3	$V_3 = \frac{4\pi}{3} R^3$	$O_3 = 4\pi R^2$
4	$V_4 = \frac{\pi^2}{2} R^4$	$O_4 = 2\pi^2 R^3$
5	$V_5 = \frac{8\pi^2}{15} R^5$	$O_5 = \frac{8\pi^2}{3} R^4$

Fragen:

- In welchem Raum hat die Kugel das größte Volumen? (Exakt: in welchem Raum passen die meisten n-Einheitswürfel in eine n-Einheitskugel? 1D: Faktor 2, 2D: Faktor 3.14..., usw.)
- Wie sieht das bei der Oberfläche aus?
- Wie hängt das vom Radius der Kugel ab? In wie viel Dimensionen ist die 'größte' Kugel mit R=2 zu finden? Wo mit R=0.5? Wo mit R=0.9 oder 1.1?
- Hat man einen n-Würfel mit Kantenlänge 2, kann man aus ihm eine n-Einheitskugel schnitzen. Dabei wird Material entfernt und wird zu 'Abfall'. Gibt es Räume, in denen das Verhältnis zwischen Kugel und Abfall besonders (un-)günstig ist?
  (Die Informatikabteilung kann Dich mit einem Python-Programm bei der Berechnung unterstützen!)

Allgemeine Fragen zum Nachdenken:

- Passt ein 3D-Würfel mit Seitenlänge 10 in eine 3D-Kugel mit Radius 2?
- Passt ein 3D-Würfel mit Seitenlänge 10 in eine 4D-Kugel mit Radius 2?
- Passt ein Faden der Länge 10 in einen Kreis mit Radius 2?
- Passt ein Elefant in eine 4D-Kugel mit Radius 1 Millimeter?

Detail am Rande:
Die Maßzahlen für die Volumina der n-Kugeln werden für größere n immer kleiner. Es ist inzwischen bekannt, dass die Summe *aller* unendlich vieler Volumina $V_n(1)$ endlich ist! Die Abnahme erfolgt also sehr rasch.