

Dimensionsbegriff

Euklid, (um -300)

erstes Buch, ebene Geometrie

	Ein Punkt hat keine Teile
	Eine Linie hat keine Breite, die Enden einer Linie sind Punkte
	Eine Fläche hat nur Länge und Breite, ihre Ränder sind Linien

neuntes Buch, räumliche Geometrie

	Ein Körper hat Länge, Breite und Tiefe, sein Äußeres ist eine Fläche
--	--

für den Lehrer:

Riemann

stellt in seiner Dissertation 1854 bedauernd fest, dass sich seit Euklid niemand mehr mit dem Dimensionsbegriff befasst hat.

Hermite 1883:

beklagt, dass er Cantors Schriften nicht folgen kann (Abbildungen von Kurven auf Flächen), da ihm die zugrundeliegenden Begriffe nicht wirklich klar sind

Poincare 1912:

Ein Raum (Kontinuum) von Dimension 1 kann durch eine Anzahl unterscheidbarer Elemente geteilt werden. Ein Raum von Dimension 2 kann durch Schnitte in Form eines Kontinuums der Dimension 1 geteilt werden, ein Raum der Dimension 3 durch Schnitte der Dimension 2, und so weiter. (Idee: eine Linie teilt man durch Entfernen eines Punktes, eine Fläche teilt man durch Entfernen einer Linie usw.)

Brouwer um 1911:

Die 'praktische' Definition ähnlich der Vektorrechnung:

	Ein Raum (Kontinuum) hat Dimension n , wenn zu seiner Beschreibung mindestens n Parameter nötig sind
--	--

ist auf jeden Fall unzureichend:

Cantor: zeigte eine Bijektion zwischen einer Gerade und eine Fläche

Peano: zeigte eine stetige Abbildung eines Intervalls auf ein Quadrat

Fände man eine stetige Bijektion (also beides gleichzeitig) zwischen Gerade und Ebene, so wäre die Dimension jedes Raumes durch eine Transformation beliebig erhöhbar.

Damit wäre der Begriff 'Dimension' topologisch ohne jede Bedeutung.

Beweis der Nichtexistenz dieser Transformation erstmals durch Brouwer. Er fand dazu auch eine topologisch einwandfreie Definitione der Dimension.

Gleichzeitig Lebesgue 1911:

Topologisch invariante Definition mittels Überdeckungen, heute gültig. Stimmt für euklidische Räume mit der 'gewohnten' überein.

Euklidische Dimension im Unterricht:

	Punkt	Dimension = 0
verschiebe den Punkt um 1 Einheit	Strecke	Dimension = 1
verschiebe die Strecke senkrecht um 1 Einheit	Quadrat	Dimension = 2
verschiebe das Quadrat senkrecht um 1 Einheit	Würfel	Dimension = 3
verschiebe den Würfel senkrecht um 1 Einheit	???	Dimension = 4
verschiebe den n-Würfel senkrecht um 1 Einheit	n+1-Würfel	Dimension = n+1

Damit erhält man eine anschauliche Definition von Dimension, die 'nach oben' offen ist. Leicht sieht man, dass sie zu Euklid und der Vektorrechnung kompatibel ist, allerdings einen interessanten Aspekt enthält: sie erlaubt das 'Erzeugen' neuer Dimensionen. Auch die 11 Dimensionen einer Stringtheorie sind damit erfassbar.

Veranschaulichung: Projektion des Tesserakts

Diskussion: existieren 4-D Objekte?

- 1.) Was existiert überhaupt. Erste Idee: was man selbst sehen oder angreifen kann.
- 2.) Existiert der Gipfel des Himalaya, existiert der Quastenflosser?
- 3.) Entwicklung: eine 'verlässliche und überprüfbare Quelle' für Informationen genügt uns auch als Existenzbeweis.
- 4.) Jetzt beharrt ich auf diesem Standpunkt. Wenn also jemand alle Eigenschaften eines Objektes sinnvoll angeben kann, dann kann man von der Existenz dieses Objektes ausgehen. (Jemand sagt am Telefon 'Ich habe einen Ihrer Pullover geklaut. Er ist bei mir in der Wohnung.' – wie überprüft man das? Man verlangt eine exakte Beschreibung)
- 5.) Jetzt kann der Schüler die Existenz des Hyperwürfels selbst beweisen, indem er alle seine Eigenschaften angibt

Ding	dim	Besteht aus ('Seitenflächen')	Anzahl 'Seiten' (Begrenzungen)	Anzahl Eckpunkte	Koordinaten der Eckpunkte	Anzahl der 'Kanten'	Länge der Raumdiagonale
	0			1		---	---
	1			2			
	2		4	4	($\pm 1/\pm 1$)	4	$\sqrt{2}$
Würfel	3	Quadrate	6	8	($\pm 1/\pm 1/\pm 1$)	12	$\sqrt{3}$
	4		8	16			
	5						
	n						

Eckpunkte und Kanten entsprechen den Bauteilen des Geomag – Spiels.

Weiters: Das Netz eines Würfels, Hyperwürfels, Quadrates. Eulerwege auf dem Hyperwürfel,...

Siehe: Salvador Dali, Corpus Hypercubus,
Übergriff Bildnerische Erziehung (Surrealismus, Kubismus)

Bewusstseinsweiterung:

Abbott's Flatland, Veranschaulichung durch Reduktion der Dimensionen

Interessante Fragen:

- Rauminhalt, Oberfläche von n-Würfeln und n-Kugeln (Wahlpflichtfach)
- Kann man einen 3D Elefanten in eine 4D Kugel mit Radius 1mm stecken?
- Wie sieht eine 4D-Person einen 3D-Menschen?
- Ein Würfel, Hyperwürfel wirft seinen Schatten auf die Erde; eine 4D Kugel durchdringt eine Ebene,...
- kann man einen Elefanten in eine Hyperkugel von Radius 1 cm stecken?
- Wie sieht uns eine 4D-Person?

Hausdorff-Dimension (1919)

Jeder hat gelernt: Streckt man in einer ebenen Figur jede Länge auf das doppelte (dreifache,...), wird die Fläche vier (neun,...) mal so groß.

Für eine räumliche Figur 8 (27,...) mal.

Das können wir allgemein formulieren:

Dimension = N	Macht man jede Länge D mal so groß, wird der Inhalt der Figur D^N mal so groß
---------------	---

Wiederum: das passt mit allen bisherigen Definitionen zusammen, geht aber vielleicht noch weiter.

Umgekehrt geschrieben: Wir vergrößern die Längen um den Faktor D und beobachten eine Inhaltsvervielfachung um den Faktor f. Dann ist N berechenbar:

$$D^N = f$$

$$N = {}_D \log(f) = \frac{\ln f}{\ln D}$$

Damit ist der fraktale Dimensionsbegriff verständlich gemacht.

Fortsetzung: Koch-Kurve, Peano-, Hilbertkurven,... L-Systeme

Übergriffe: Bildnerische Erziehung (Muster in Moschee-Mosaiken, Mauren), Informatik (Modellierung von Bergen, Bäumen, Gräsern), Biologie (Musterung von Tierfellen, Muschelschalen...), Musik (fraktale Kompositionstechniken), ...