

Zenos Paradoxien

Zeno von Elea lebte im 5. Jahrhundert vor Christus in Griechenland. Er war Schüler des Philosophen Parmenides. Berühmt wurde er für seine um etwa 465 v.Chr. verfasste Sammlung von über 40 Paradoxien. Weniger als 200 Worte sind von Zeno direkt erhalten geblieben. Unser heutiges Wissen über den Philosophen und sein Werk beruht auf der ein Jahrhundert später verfassten 'Physik' von Aristoteles, sowie dem Werk des Denkers Simplicius (6. Jhdt. n. Chr.), der möglicherweise über eine Abschrift oder Zusammenfassung des Werkes von Zeno verfügte.

Aristoteles würdigt Zeno auch als den Vater der Dialektik. Dies ist eine Argumentationsmethode, in der ein Gesprächsteilnehmer eine Behauptung aufstellt und ein zweiter sie widerlegt, indem er zeigen kann, dass diese Behauptung zu einem Widerspruch führt.

Speziell die Paradoxa über Zeit und Raum sind bis heute im Gespräch und werden immer wieder fachlich diskutiert. Es dauerte zwei Jahrtausende, bis sie als 'akzeptabel gelöst' betrachtet werden konnten und zeigen noch heute die Denkschwierigkeiten des menschlichen Gehirns auf, wenn es um die Begriffe 'unendlich', 'stetig' und 'diskret' geht.

1) Die Rennbahn-Paradoxie

Stell Dir eine Rennbahn vor, die von ihrem Anfangspunkt bis zum Ziel 1 km misst. Der Läufer Achilles soll die Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Um aber die Strecke von Start (A) bis Ziel (B) zu durchlaufen, muss zuerst einmal der Streckenmittelpunkt (C) erreicht, das heißt die halbe Strecke durchlaufen werden. Weiters muss vor dem Erreichen des Punktes C der Mittelpunkt der Strecke AC erreicht werden, und so weiter.

Um ans Ziel zu gelangen muss also eine unendliche Anzahl von Strecken durchlaufen werden, da sich jede Strecke weiter teilen lässt. Die Längen sind bekannt: $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$,... , keine ist gleich Null. **Es müssen demnach unendlich viele Teilstrecken zurückgelegt werden, was unendlich lange dauert. Achilles kann folglich niemals am Ziel ankommen.**

2) Rennbahn-Paradoxie, verschärft

Überlegt man obige Argumentation genauer, so bemerkt man, dass Achilles eine unendliche Anzahl von Punkten vor sich hat, die er passieren muss. Kann er einen dieser Punkte erreichen? Nur dann, wenn er den Halbierungspunkt davor erreicht. Kann er den erreichen? Nur wenn er den Halbierungspunkt vor diesem erreicht. Aber welcher Punkt ist der erste, den er nach dem Start bei A erreichen muss? Es gibt ihn nicht, da sich jede Strecke wieder halbieren lässt. **Achilles kann seinen Startpunkt gar nicht verlassen.**

3) Achilles und die Schildkröte

Achilles, ein berühmter Schnellläufer, bestreitet einen Wettlauf gegen eine Schildkröte. Da die Schildkröte viel langsamer als Achilles läuft, darf sie mit einem kleinen Vorsprung starten.

Wenn Achilles nun die Wegstrecke durchlaufen hat, die den Vorsprung der Schildkröte gebildet hat, ist diese bereits wieder ein Stückchen weiter. Wenn Achilles diesen neuen kleinen Vorsprung durchlaufen hat, ist die Schildkröte aber schon wieder ein wenig weiter. **Jedesmal, wenn Achilles den Vorsprung der Schildkröte durchlaufen hat, ist diese schon wieder ein Stückchen weiter voraus. Achilles kann die Schildkröte niemals einholen, geschweige denn überholen.**

Beachte: Es ist jedermann klar, dass die von Zeno gezogenen Folgerungen falsch sind. **Es geht darum, den Fehler in Zenos Argumentation zu finden!** (Paradoxie = ein anscheinend richtiges Argument ergibt einen offensichtlichen Widerspruch zur Erfahrung)

Lösungsansatz 1:

Es sind unendlich viele Teilstrecken, aber ihre Summe ist nicht unendlich, wie die Griechen glaubten. Berechne $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ (die Längen der jeweils noch vor Achilles liegenden Teilstrecken)

Lösungsansatz 3:

Ähnlich 1. Nimm als konkretes Beispiel den Vorsprung 1m, Achilles läuft mit 1m/s und die Schildkröte mit einem Zehntel dieser. Wiederum ist die Summe unendlich vieler Teilstrecken nicht unendlich groß. Berechne sie!

Zu Beispiel 2:

Diesem Paradoxon liegt ein sehr schwieriges Thema zugrunde: Sind Raum und Zeit kontinuierliche oder diskrete Größen? Gleichartig oder unterschiedlich? Zeno hat für jede mögliche Antwort Paradoxa gefunden. Ein ähnliches:

Wenn ein Pfeil im Zustand der Bewegung durch die Luft fliegt, hat er zu jedem Zeitpunkt eine ganz bestimmte Position und nimmt einen ganz bestimmten Raumbereich ein. Das bedeutet aber, dass er in Ruhe ist. Wenn der Pfeil aber **an jedem Punkt in Ruhe** ist, kann er sich gar nicht vom Startpunkt zum Zielpunkt bewegen.

Erst Isaac Newton konnte den Begriff einer 'Momentangeschwindigkeit' mathematisch fassbar machen, musste dafür aber zuerst die Differenzialrechnung erfinden.

Lösungsansatz: Man kann das (gut gemachte) Photo eines ruhenden Balls nicht vom Photo eines bewegten Balls unterscheiden. So etwas wie einen 'Bewegungszustand' als Eigenschaft eines Körpers gibt es gar nicht, Bewegung ist die Beschreibung einer Ortsänderung.

Bonus-Paradoxie:

Falls Du gedacht hast, Beispiel 1 sei 'völlig geklärt': Hier eine moderne Version, die keine Lösung besitzt. Ein Gedankenexperiment des britischen Philosophen James Thomson:

Die Unendlichkeitsmaschine

Stell Dir eine ganz normale Lampe vor, mit einer Glühbirne und einem Ein/Ausschaltknopf. Entweder ist sie eingeschaltet, oder sie ist ausgeschaltet. Jetzt ist die Lampe aus.

'1': Nun drückt jemand auf den Ein/Aus-Knopf, die Lampe geht an. '2': 1/2 Sekunde später drückt wieder jemand auf den Knopf, die Lampe geht aus. '3': 1/4 Sekunde später drückt wieder jemand auf den Knopf, die Lampe ist an. UND SO WEITER ('4', '5', '6',...). Jeder Druck dauert halb so lang wie der davor.

Der ganze Spaß dauert eine Sekunde, wobei der Schalter unendlich oft (so oft wie es natürliche Zahlen gibt) betätigt wurde.

Danach lautet die ganz einfache Frage: IST DIE LAMPE NUN AN ODER AUS?

Sie kann nicht AN sein. Denn 'an' ist sie nach dem 1., 3., 5.,... Druck, und nach jeder ungeraden Zahl folgt eine gerade, die die Lampe wieder löscht.

Sie kann nicht AUS sein. Denn 'aus' ist sie nach dem 2., 4., 6.,... Druck, und nach jeder geraden Zahl folgt eine ungerade, die die Lampe wieder erhellt.

DIE LAMPE IST ALSO WEDER AN NOCH AUS.

Umgekehrt betrachtet: Besäße die Lampe einen der beiden Zustände, dann wüssten wir, ob die letzte (größte) natürliche Zahl gerade oder ungerade ist – doch diese Zahl existiert gar nicht.

(Dieses Beispiel dient als Denkwort für Mathematiker, die meinen, die Unendlichkeit sei fassbar, wenn man sie auf ein endliches Intervall abbildet.)