Zahlenbereiche

Historisch:

1.) N zum Zählen von Dingen. 1,2,3,4,5,... In jeder Kultur vorhanden.

2.) Bruchzahlen um Teile von Dingen zu beschreiben. Babylon: Sechzigstel, Ägypten: Rechnen mit einfachen Brüchen, Griechenland: alle Brüche durch Streckenteilung konstruierbar (ähnliche Dreiecke)

3.) erste Hinweise auf Zahlen, die man konstruieren kann, die aber keine Brüche sind (Pythagoreer, Wurzel aus 5, Wurzel aus 2, Pi)

4.) Null als Zahl

5.) Negative Zahlen, um Werte kleiner als Null angeben zu können

Mathematischer Stammbaum der Mengen (jede Zahlenmenge enthält alle vorangehenden)

1.) Natürliche Zahlen **N** (mit oder ohne Null. N und N* oder N_0 und N). Addition und Multiplikation möglich. Konstruktion: 1 ist eine natürliche Zahl. Der Nachfolger (n+1) einer natürlichen Zahl n ist wiederum eine natürliche Zahl). 1,2,3,4,5,... Ob die Null dazugehört, muss man sich ausmachen. N_0 und N oder N und N^*.

2.) Ganze Zahlen **Z** um die Umkehrung der Addition (Subtraktion) ausführen zu können (historisch erst nach Einführung des Dezimalsystems erfolgt.) ...-3,-2,-1-0,1,2,3,...
Null ist eine ganze Zahl und jede Zahl hat nicht nur einen Nachfolger, sondern auch einen Vorgänger.

3.) Rationale (vernünftige) Zahlen **Q**, um auch die Division zu erlauben. Alle Brüche und Quotienten.

4.) Es gibt Zahlen, die man nicht als Bruch darstellen kann (unvernünftig, weil gegen die Lehre von Pythagoras – 'alles ist Zahl', aber er kannte nur Brüche). Irrationale Zahlen dazu → Reelle Zahlen **R**.
Geometrisch konstruierbar: alle Brüche (Lineal) und Quadratwurzeln (Zirkel), sonst nichts.
[Algebraische Zahlen: alles, was Lösung von Polynomgleichungen sein kann – Q und alle Wurzeln.
Transzendente Zahlen: alle übrigen: Pi, e, ...]
R = alle Punkte auf einer Gerade (Strecke).

5.) Es ist nicht möglich, die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen. Erweiterung zu den komplexen Zahlen **C** mit der imaginären (eingebildeten) Einheit i. Rückschlag: kein Größenvergleich von Zahlen mehr möglich. (angenommen i>0. Multiplikation mit i führt zu -1>0, falsch. ang. i<0, Mult. mit i führt wegen umzudrehendem Ungleichheitszeichen zu -1>0, ist ebenfalls falsch.)

6.) Weitere Mengen sind möglich, aber keine praktische Anwendung (Hyperkomplexe Zahlen mit 3 'imaginären Einheiten', Multiplikation nicht mehr kommutativ),... Beispiele in Fraktalgrafik.

Unendlichkeit

'Gewöhnlichen' Mengen kann man abzählen, d.h. die Anzahl ihrer Bestandteile (Elemente) feststellen.
Abzählen bedeutet, eine 1-zu-1 Zuordnung mit einer Menge wie {1,2,3,4} herzustellen.

Allgemein: zwei Mengen haben 'gleich viele Elemente' (sie sind gleich mächtig). wenn man eine 1 zu 1 Abbildung (bijektive Abbildung) zwischen ihnen finden kann. (Ein einziges Beispiel genügt, siehe 'haben 2 unterschiedlich lange Strecken gleich viele Punkte?)

Die natürlichen Zahlen haben kein 'letztes' oder 'größtes' Element. 'Unendlich viele Elemente'.

Hat Q mehr Elemente als N?
Diagonales Abzählen der Brüche → nein, Q ist ebenfalls 'abzählbar unendlich' (als Liste 'erste Zahl', 'zweite Zahl',... angebbar).
analog alle Wurzeln: algebraische Zahlen sind abzählbar unendlich.

Hat R mehr Elemente als R?
Georg Cantor, Diagonalbeweis.
Angenommen, jemand hat eine Liste aller reellen Zahlen (anzählbar viele). Dann können wir sofort eine Zahl angeben, die nicht in dieser Liste vorkommt. Also kann es die Liste gar nicht geben.

R hat also echt mehr Elemente als N.

Der Raum R^n hat gleich viele Elemente wie R. 'Gleich mächtig'.

Mächtigkeit von N : $\aleph_0$
Cantor: Die Menge aller Teilmengen einer Menge hat echt mehr Elemente (erlaubt 'Stufen der Unendlichkeit' $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$) als die Menge selbst.

Kontinuumshypothese: Ist die Mächtigkeit von R gleich $\aleph_1$ oder gibt es etwas zwichen N und dem 'Kontinuum'? Kann weder bewiesen noch widerlegt werden.

Cantor Paradoxon: Die 'Menge aller Mengen' enthält alle ihre eigenen Teilmengen. Also muss ihre Mächtigkeit größer sein (wegen 'alle Teilmenge') als ihre Mächtigkeit (ursprüngliche Menge). Nanu???

Hotel Unendlichkeit (David Hilbert)

Angenommen, wie besitzen ein Hotel mit folgender Eigenschaft: Jede mögliche Zimmernummer (ab 1) ist vorhanden. Also so viele Zimmer wie natürliche Zahlen.

1.) Das Hotel ist voll belegt. Ein weiterer Gast kommt. Kann er Platz finden? Ja, $\aleph + 1 = \aleph$
(Jeder Gast geht ins Zimmer mit Nummer+1. Jeder Gast hat wieder ein Zimmer, aber Zimmer 1 wird frei)

2.) Das Hotel ist voll belegt. Ein Reisebus mit 1000 Gästen kommt. Sie finden Platz. (Zimmernummer+1000) $\aleph + k = \aleph$

3.) Das Hotel ist voll belegt. Jeder Gast hat einen Partner, der zu Hause geblieben ist. Jetzt kommen auch alle Partner (unendlich viele!), jeder will ein eigenes Zimmer im bereits voll besetzten Hotel. Alle bisherigen Gäste gehen in das Zimmer mit doppelter Nummer. 1,3,5,7,... sind nun frei. Partner k ins Zimmer 2k-1. $2 \cdot \aleph = \aleph$

4.) Wie 3.) aber jeder Gast hat k Partner zu Hause. (Gäste gehen ins Zimmer mit (k+1)-facher Nummer)
$k \cdot \aleph = \aleph$

Gedankenspielerei

Folgen von Zahlen, die besonders rasch wachsen.

<n> 1,2,3,4,5,...

$\langle n \rangle$ 1, 2, 3, 4, ...
$\langle n^2 \rangle$ 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
$\langle 2^n \rangle$ 1, 2, 8, 16, 32, 64, ...
$\langle n^n \rangle$ 1, 4, 27, 256, 3125, 46656, ...

$\langle n!! \rangle$ $1!,\ 2!^{2!},\ 3!^{3!^{3!}},\ ... = 1,\ 4,\ 6^{6^6} = 6^{46656}$ das dritte Element hat bereits über 36000 Stellen

Kein Mensch hat mehr eine Vorstellung von 10!!. Diese Zahl ist aufgeschrieben länger als der Durchmesser unseres Universums. Und 100!! und 1000!! sind ebenfalls natürliche Zahlen.

Wir könnten auch <n$> erfinden. da besteht das n-te Element nicht aus n exponenzierten Werten, sondern aus n! Werten. Hier ist schon 3$ völlig unvorstellbar. Und das ist erst das dritte Element...

Die größte brauchbare Zahl

Euler (glaub ich) hielt 9 hoch 9 hoch 9, die größte Zahl, die sich mit 3 Ziffern schreiben lässt, für die größte praktisch sinnvolle Zahl. Berechne sie!
Vergleiche $(9^9)^9$ mit dem Wert $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$. Reicht die Größe aus?