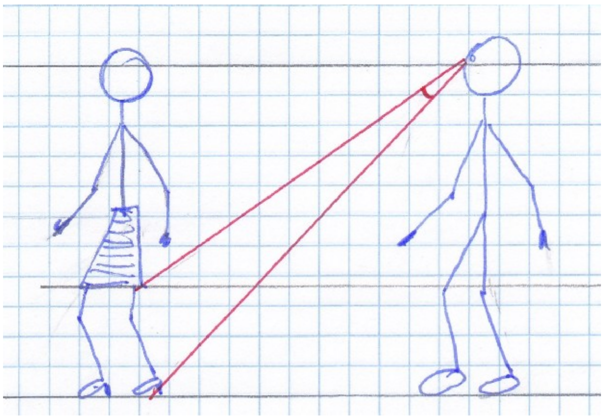
Trost und Moral in der Mathematik

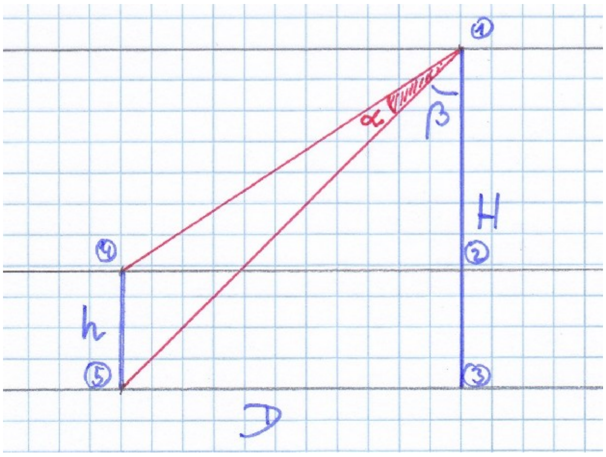
Ein Student geht hinter einem Mädchen mit auffallend hübschen Beinen her. In welcher Entfernung muss der Student hinter dem Mädchen gehen, um die Beine, so weit sie unter dem Rocksaum hervorschauen, unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Rocksaumhöhe sei dabei 70 cm und die Augenhöhe des Studenten 175 cm. (Nach dem Göttinger Professor Rellich, der mit diesem Beispiel dem Vorwurf begegnete, seine Vorlesung sei realitätsfern.)



Überlegen wir:

Ist der Student sehr weit entfernt, dann wird der Winkel klein, da weit entfernte Objekte klein aussehen. Ist der Student zu nahe hinter dem Mädchen, wird der Winkel ebenfalls klein, da die Perspektive eine starke Verkürzung des Beins mit sich bringt.

Es muss also irgendwo einen maximalen Wert für den Winkel geben, das Extremwertprüfen mit der zweiten Ableitung kann getrost entfallen.



Bezeichnen wir die Augenhöhe des Studenten mit H und die Rocksaumhöhe mit h. Wir setzen die Entfernung D mit diesen Werten in Beziehung.

Es lassen sich zwei rechtwinklige Dreiecke beschriften:

Das Dreieck 531: Winkel β, Katheten D und H,
das Dreieck 421: Winkel α+β, Katheten D und H-h.

Mit dem Tangens können wir diese Größen verknüpfen.

Das optimale D entspricht einem maximalen Winkel α.

$$\tan\alpha \;=\; \frac{D}{H} \qquad\qquad \alpha \;=\; atan\frac{D}{H}$$

$$\tan\alpha+\beta \;=\; \frac{D}{H-h} \qquad\qquad \alpha+\beta \;=\; atan\frac{D}{H-h}$$

$$\alpha \;=\; atan\frac{D}{H-h} \;-\; atan\frac{D}{H}$$

Die Funktion α hängt von D ab. Wir suchen im Rahmen einer Extremwertaufgabe denjenigen Wert D, der α maximal macht.

Einziges Problem: wie differenziert man einen Arcustangens? Das kam im Unterricht nicht vor. Aber es gibt Informationsquellen: 1.) Formelsammlungen aus der Schulbibliothek holen, 2.) Computer fragen, 3.) Internet durchsuchen.

Weil ich faul bin, bleibe ich sitzen und befrage den Computer. Maxima aufrufen und los:

Die Eingabe `diff(atan(x),x);` gibt uns die Antwort $\frac{1}{1+x^2}$. Das sieht mühsam aus, aber nicht weiter kompliziert.

$$\partial_D \alpha = \frac{1}{H-h} \cdot \frac{1}{1+\frac{D^2}{(H-h)^2}} - \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{1+\frac{D^2}{H^2}} = \frac{1}{H-h} \cdot \frac{(H-h)^2}{(H-h)^2+D^2} - \frac{1}{H} \cdot \frac{H^2}{H^2+D^2} =$$

$$= \frac{(H-h)}{(H-h)^2+D^2} - \frac{H}{H^2+D^2}$$

Diese Funktion setzen wir nun, um den Extremwert zu erzwingen, gleich Null und lösen nach D

$$\partial_D \alpha = \frac{(H-h)}{(H-h)^2+D^2} - \frac{H}{H^2+D^2} = 0$$

$$\frac{(H-h)}{(H-h)^2+D^2} = \frac{H}{H^2+D^2}$$

$$(H-h) \cdot (H^2+D^2) = H \cdot ((H-h)^2+D^2)$$
$$H^3+H D^2-h H^2-h D^2 = H^3-2 H^2 h+H h^2+H D^2$$
$$-h H^2-h D^2 = -2 H^2 h+H h^2$$
$$-H^2-D^2 = -2 H^2+H h$$
$$H^2-H h = D^2$$
$$H (H-h) = D^2$$

$D=+\sqrt{H (H-h)}$ Wir haben die Lösung gefunden !

Kontrolle in Maxima:

```
(%i1) diff(atan(D/(H-h)),D) - diff(atan(D/H),D);
(%i2) solve([%o1=0], [D]);
```

Diese beiden Zeilen ergeben genau unsere Lösung. Bravo.

Geometrische Interpretation:

Wenn der Student gut in Mathe ist, wählt er als Abstand das geometrische Mittel aus H und H-h.

Trost und Moral?

Der **Trost** ist, dass der Abstand nicht unendlich ist. Und die **Moral**, dass er nicht Null ist.

Aufgaben:

- In einer Kirche ist die Unterkante eines an der Seitenwand befindlichen und 4 Meter hohen Freskos in 3 Meter Höhe. In welchem Abstand von der Wand sieht man optimal? Hilft obige Rechnung weiter?
- Wird ein (guter) Photograph ebenfalls diesen Abstand wählen? Warum nicht?

- Im Museum ist die Unterkante eines 2 Meter hohen Gemäldes in 90cm Höhe. Kann man den optimalen Betrachtungsabstand genauso berechnen?