Selbstbezüge (self references)

Selbstbezügliche Aussagen sind ein altes Thema der Mathematiker und Philosophen. Es geht darin um Sätze, die etwas über sich selbst aussagen. Das kann zu wunderbaren Paradoxien führen, wobei wir unter paradox verstehen wollen, dass es dem 'gesunden Menschenverstand' irgendwie zuwiderläuft.

Beispiel 1:
Begonnen hat die Geschichte im 7. Jhd. v.Chr. mit dem griechischen Denker Epimenides, der aus Kreta stammte. Er überlieferte folgende Aussage:
Epimenides sagt: Alle Kreter sind Lügner.
An dieser Aussage ist nichts Ungewöhnliches, außer man beginnt nachzudenken, ob sie richtig ist, oder nicht. Denn: Ist sie richtig, so ist Epimenides (wie er selbst sagt) ein Lügner. Wenn er jedoch ein Lügner ist, dann ist die Aussage des Satzes aber falsch und er ist in Wirklichkeit kein Lügner und er sagt die Wahrheit. Wenn er die Wahrheit sagt, dann stimmt aber seine Aussage, ein Lügner zu sein..... Was ist er nun – ein Lügner oder nicht? Ist diese Aussage nun richtig oder falsch?

Dieses sogenannte '**Lügner-Paradoxon**' war im Altertum so berühmt, dass es sogar ins Neue Testament Eingang gefunden hat. Im Titusbrief 1:12 zitiert Paulus den Epimenides, hat jedoch leider nicht verstanden, um was es eigentlich geht.

Beispiel 2:
Noch stärker bringen folgender Sätze das Problem auf den Punkt:
'Ich lüge.' oder **'Dieser Satz ist falsch.'** (Eubulides zugeschrieben)

Beispiel 3:
1913 ließ sich der Mathematiker P.E.B. Jourdain Visitenkarten mit folgenden Vorder- und Rückseiten drucken:

Die Behauptung auf der anderen Seite dieser Karte ist **wahr**	Die Behauptung auf der anderen Seite dieser Karte ist **falsch**

Durch das Trennen in zwei Teilaussagen stellt jede die andere auf den Kopf. Welche ist denn jetzt nun wirklich wahr?

Beispiel 4:
Der Mathematiker Martin Gardner wollte es genau wissen. Er verschickte an Freunde, angesehene Mathematiker und Philosophen einen Brief, der eine Postkarte enthielt und die Bitte, diese an ihn zurückzusenden. Auf der Karte stand folgender Text:

Wenn Sie glauben,
dass ich untenstehendes Kästchen
bei Erhalt Ihrer Karte leer vorfinden werde,
dann kreuzen Sie es an.
Andernfalls lassen Sie es leer.

☐

Die Ergebnisse und mitgeschickte Statements der Wissenschafter, mit denen diese ihre Entscheidung begründeten, waren dann Thema einer seiner wunderbaren Kolumnen im *Scientific American*.
Gardners genialer Trick war es, die Herren Professoren zu einem *aktiven Handeln* zu zwingen. Damit mussten sie sich dem Paradoxon tatsächlich stellen und eine Lösung finden, statt nur abstrakt darüber reden.

Beispiel 5:
An einer amerikanischen Autobahn hat ein Scherzbold folgendes Schild aufgestellt:

IGNORE
THIS SIGN

Theorie:

Bevor ich noch weitere Beispiele dieses sogenannten 'Lügner-Paradoxons' vorstelle, sollten wir die Frage erörtern: was sagt denn die heutige Wissenschaft zu diesem Paradoxon? Gibt es eine Lösung?

Ja, es gibt eine. Allerdings keine solche, die von Epidemides' Aussage sagen kann, ob sie richtig oder falsch ist.
Die Diskussion über dieses Thema dauerte Jahrhunderte. Besonders im Mittelalter erdachte man viele Variationen, ohne jedoch an den Kern des Problems zu vorzudringen. Kirchliche Kreise zerbrachen sich etwa den Kopf über Aussagen wie 'Wenn Gott allmächtig ist, kann er dann einen Stein erschaffen, der so schwer ist, dass er ihn gar nicht heben kann?'. Dies klingt genauso widersprüchlich wie die Aussage von Epimenides, zeigt allerdings nur, dass das Wort 'allmächtig' keinen sinnvollen Begriff darstellt...

Der erste wirklich brauchbare Lösungsansatz kam von Bertrand Russel. Er meinte, dass derartige Paradoxien durch Zirkelschlüsse verursacht seien und wollte diese endlose Kette durchbrechen. Er (und später Carnap) sprach von einer Hierarchie logischer Typen von Aussagen:
Typ_0 : 'X ist ein Gegenstand'. Hier meint man das Objekt selbst.
Typ_1 : 'X ist grün'. Hier meint man eine Eigenschaft des Objektes
Typ_2 : 'Grün ist eine Farbeigenschaft'. Man trifft eine Aussage über eine Eigenschaft
usw.
(Besonders schön hat übrigens Lewis Carroll in seiner 'Alice' diese Ebenen dargestellt, als Alice einen Ritter trifft, der ihr ein Lied vorsingen möchte. Sie muss dabei feststellen, dass der Ritter unter dem Lied, dem Namen des Liedes, dem Titel des Liedes und dem Namen des Titels völlig unterschiedliche Dinge versteht! Siehe Anhang.)

Russel meinte nun, dass die Lügner-Paradoxie dadurch entsteht, dass man eine Typ_0 Aussage (Epimenides ist ein Lügner) mit einer Typ_1 Aussage (Epimenides sagt, dass er ein Lügner ist) gleichsetzt, und das sei unzulässig. Die Richtigkeit einer Aussage vom Typ_n kann nur innerhalb einer Typ_{n+1} Aussage diskutiert werden, und das ist etwas ganz anderes und darf nicht vermischt werden.

Damit war zwar das Circulus-Viciosus-Problem aus der Welt geschafft, doch war auch diese Lösung noch nicht am Kern des Problems angelangt. In der strengen Welt der Mathematik hatten sich nämlich ähnliche Problemfälle eingestellt, und deren formale Sprache sollte über Wortklaubereien doch erhaben sein. Speziell betraf es den Begriff der 'Menge'. Russel hatte 1903 gezeigt, dass eine Definition wie 'eine Menge ist die Zusammenfassung ihrer Elemente' nicht widerspruchsfrei ist. (Übrigens hat die Mathematik bis heute keine bessere Definition gefunden. Aber man hofft, dass es irgendwann einmal eine bessere geben wird, damit zumindestens das grundlegende Gebiet der Mengenlehre keine derart offensichtlichen Widersprüche beinhaltet.)

Alfred Tarski arbeitete eine andere Idee Russels weiter aus, nämlich dass sich auch die Konzepte 'Wahrheit' und 'Falschheit' in einer Hierarchie anordnen lassen. Tarskis formale Analyse stützt sich auf (wie er es selbst formuliert) 'eine klare Unterscheidung zwischen der Sprache, die den Gegenstand unserer Erörterung darstellt, und für die wir eine Wahrheitsdefinition aufstellen wollen (Objektsprache), und der Sprache, in der diese Definition formuliert werden soll (Metasprache). Tarski konnte die Lügner-Paradoxie erstmalig formal darstellen und erbrachte den Beweis, dass es unmöglich ist, eine formale Definition von Wahrheit oder Falschheit aufzustellen, wenn die Ordnung (der Typ) der Metasprache dieselbe ist wie die der Sprache selbst. 'Wahr' und 'Falsch' können also nicht auf der selben Sprachebene, mithilfe derer sie ausgedrückt werden, definiert werden, sondern nur in der Metasprache. Die Ursache der Lügner-Paradoxie ist also tatsächlich die unerlaubte Gleichsetzung von Sprache und Metasprache.
Tarski meinte weiter, dass natürliche Sprachen eben nicht geeignet seien, diese Ebenen konsequent auseinanderzuhalten. Er sieht das Problem der Widersprüchlichkeit also in der Struktur unserer Sprache bzw. Denkweise.

Aber wieso treten derartige Widersprüche auch in der formalen Welt der Mathematik auf ? Ist auch hier die 'Sprache' ungeeignet gewählt?

Die Lösung – wenn auch anders als gedacht – brachte 1931 der nach Amerika emigrierte Österreicher Kurt Gödel. Er bewies, dass jedes logische System, das zumindest so interessant ist, dass es Aussagen über sich selbst machen kann, notwendigerweise Sätze formulieren kann, deren Wahrheitsgehalt nicht innerhalb dieser Logik entscheidbar ist (der berühmte 'Unvollständigkeitssatz').
Präziser: Jedes solche Gedankengebäude enthält den Satz: **Die Aussage A ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.**
Damit hatte man die Lösung – nämlich dass es keine gibt.
Auch die Mathematik muss damit leben, dass sie als logisch abgeleitetes System die Aussage **"Ich bin unentscheidbar" enthält**. Sogar die vermeintlich unverfängliche Zahlenrechnerei der Arithmetik kann also Aussagen formulieren, von denen sie nicht (und niemals) entscheiden kann, ob sie richtig oder falsch sind!

Es ist also nicht die Sprache das Problem und sollte deswegen Verbesserungen erfahren, sondern wir müssen uns daran gewöhnen, dass das Auftreten von Widersprüchen eine nicht zu verhindernde Tatsache ist. (Asiatische Philosophen würden an dieser Stelle wohl schmunzeln und sagen 'Uns ist das seit Jahrtausenden gut bekannt. Seht euch doch die zwei Punkte in unserem Yin-Yang Symbol an. Was glaubt ihr, wofür die stehen!')

Noch einige weitere hübsche Beispiele dieses Paradoxietyps, wo sich Aussagen 'auf sich selbst' beziehen:

Beispiel 6:
'Authorized parking forbidden!'

Beispiel 7:
Monism is the theory that anything less than everything is nothing.

Beispiel 8:
Hier sind drei Fehler:

1 + 1 = 3
2 ist eine natürliche Zahl
Delphine sind Fische

Beispiel 9:
Dieser Zatz ist nicht selbstbezüglich, denn 'Zatz' ist kein Wort.

Beispiel 10: (B. Russel)
Der Barbier des Dorfes rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren.

Und noch einige hübsche Variationen des Themas:

Beispiel 11:

The Universe may
be as great as they say
but it wouldn't be missed
if it didn't exist.

Beispiel 12: (eins meiner Lieblingsbeispiele)
Die Nostalgie ist auch nicht mehr, was sie einmal war.

Beispiel 13: (Auf dem Bildschirm des Computers)
`Computers never make misteaks.`

Beispiel 14: (aus Littlewood's Miscellany)
E. Harrison: 'Is it true that philosophy has never proved that something exists?'
B. Russel: 'Yes, and the evidence for it is purely empirical.'

Beispiel 15:
There is the case of the voter who when asked by a pollster what were the reasons for the ignorance and apathy of the American public, responded 'I don't know and I don't care.'

Beispiel 16: (William Safire)
1. Don't use contractions in formal writing.
2. Do not put statements in the negative form.
3. Avoid run-on sentences they are hard to read.
4. Verbs has to agree with their subjects.
5. Avoid trandy locutions that sound flaky.

Beispiel 17: (Marvin Minsky im Umschlagtext zu 'The Mind's I' von D. Hofstadter)
This great collection on reflection provides you with your own quite special way to understand things such as why, if you don't read this book, you'll never be the same again.

Beispiel 18:
Bevor ich zu sprechen beginne, möchte ich noch etwas sagen.

Beispiel 19: (Paul Watzlawick)
"Sei spontan!"

Beispiel 20: (aus Littlewood's Miscellany)
In a *Spectator* competition the following won a prize.
Subject: **What would you most like to read on opening the morning paper?**
OUR SECOND COMPETITION
The First Prize in the second of this year's competitions goes to Mr. Arthur Robinson, whose witty entry was easily the best of those we received. His choice of what he would like to read on opening his paper was headed 'Our Second Competition', and was as follows:
"The First Prize in the second of this year's competitions goes to Mr. Arthur Robinson, whose witty entry was easily the best of those we received. His choice of what he would like to read on opening his paper was headed 'Our Second Competition', but owing to paper restrictions we cannot print all of it."

Und am Schluss eine Aufmunterung, die gerade im Schulbereich sehr passend und häufig anzutreffen ist:

**Jetzt,
wo wir das Ziel aus den Augen verloren haben,
müssen wir unsere Anstrengungen
verdoppeln!**

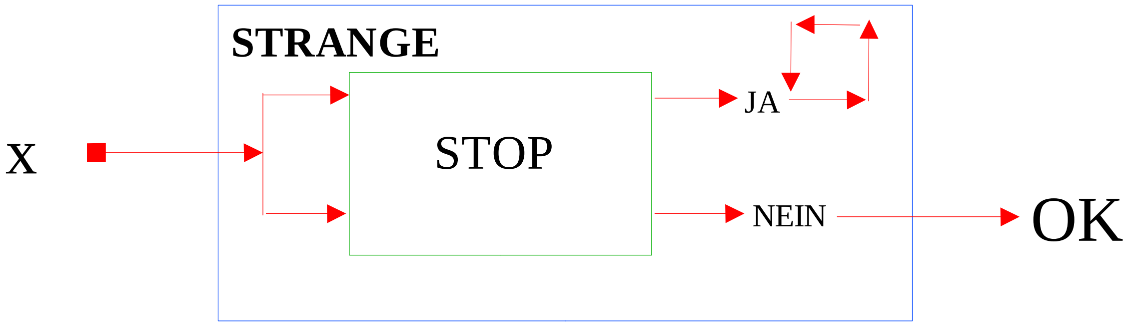
Computertechnik

Im Unterricht wirst Du mehr über Algorithmen, Turing-Maschinen und 'Gödelisierung' hören. Hier wollen wir nur ein Thema erwähnen, nämlich das **Halteproblem**.

Grundidee: Wir haben eine Maschine/einen Algorithmus vor uns, diese/r kann etwa ein Computer sein. Nun bekommt die Maschine 2 Eingaben: erstens einen Algorithmus (ein Programm) *x* und zweitens eine Eingabe *y*.

Meine Maschine (mein Algorithmus) STOP soll so konstruiert sein, dass sie JA ausgibt, wenn x bei der Eingabe von y anhält, und NEIN, wenn der Algorithmus x das nicht täte. Müsste ja einfach sein – Programm (Algorithmus) anschauen und dann entscheiden.

Nun entwerfe ich eine weitere Maschine namens STRANGE, die so konstruiert ist:



Bei Eingabe x testet meine Maschine also ersteinmal, ob x bei der Eingabe von x anhält (terminiert). Falls ja, geht sie in eine Endlosschleife, falls nein, sagt sie OK.

Nun stelle ich eine scheinbar harmlose Frage: **Hält STRANGE bei der Eingabe des Algorithmus STRANGE an?**
Es gibt 2 Fälle:

1.) Wird die Frage mit JA beantwortet, wird der JA-Ausgang von STOP angelaufen und STRANGE gerät in eine Endlosschleife, wodurch es NICHT ANHÄLT. Ein Widerspruch.
2.) Wenn NEIN, so stoppt STRANGE mit der Ausgabe OK. Ebenfalls ein Widerspruch.

Die Widersprüche folgen allein aus der Tatsache, dass ich die Existenz einer Maschine STOP angenommen habe. Und STOP hätte ja genau das Halteproblem gelöst. Folglich kann es sie nicht geben, und demnach **ist das Halteproblem unentscheidbar**.

Weiters:
1.) Es ist im Allgemeinen nicht möglich (in speziellen Fällen aber sehr wohl), die Korrektheit von Programmen zuzusichern.
2.) Es gibt nicht für alle gestellten Aufgaben ein Programm/einen Algorithmus, nach dem eine Lösung erhaltbar wäre.

Allgemein erhalten wir die Aussage (als Folgerung des Satzes von Rice):

Jede nicht triviale semantische Eigenschaft von Algorithmen ist nichtentscheidbar.

(Eine 'triviale' Eigenschaft ist dabei eine solche, die entweder *jede* oder *keine einzige* berechnete Funktion hat.)

Anhang: aus 'Alice behind the lookong glass'

"You are sad," the Knight said in an anxious tone: "let me sing you a song to comfort you. .... The name of the song is called '*Haddocks' eyes'*."
"Oh, that's the name of the song, isn't it?" Alice said, trying to feel interested.
"No, you don't understand," the Knight said, looking a little vexed. "That's what the name is *called*. The name really *is 'The Aged Aged Man."*"
"Then I ought to have said 'That's what the *song* is called'?" Alice corrected herself.
"No, you oughtn't: that's quite another thing! The *song* is called *'Ways and Means'*: but that's only what it's *called*, you know!"
"Well, what *is* the song, then?" said Alice, who was by this time completely bewildered.
"I was coming to that," the Knight said, "The song really is *'A-sitting On A Gate'*: and the tune's my own invention." ....

Im letzten Satz verstecken sich zwei Fehler: Erstens erkennt Alice die Melodie sofort wieder – sie stammt von einem anderen Lied. Zweitens begeht der durch Alices unsaubere Sprache total entnervte Ritter jetzt selbst einen logischen Fehler. Nach 'The song really is' hätte er genaugenommen nur eine einzige Möglichkeit gehabt – nämlich sofort loszusingen.

Beispiele aus Raymond Smullyans Gödel-Rätseln

(1) **Eis ist gefrorenes Wasser.**
Dieser Satz ist richtig

(2) **Eis hat drei Buchstaben.**
Falsch, denn Eis ist gefrorenes Wasser.
"Eis" hat drei Buchstaben.
Das ist die korrekte Aussage, mit dem Paar Anführungszeichen deuten wir an, dass wir über das Wort und nicht über die Substanz sprechen. "Eis" nennt man auch die Zitierform.

(3) **"""Eis""" hat drei Paar Anführungszeichen.**
Falsch. Die Aussage des Satzes hat nur zwei Anführungszeichenpaare.
"""Eis""" hat zwei Paar Anführungszeichen.
Das ist jetzt richtig.

(4) **Eis hat keine Anführungszeichen.**
Korrekt.

(5) **"Eis" hat keine Anführungszeichen.**
Korrekt, obwohl man welche sieht!

(6) **""Eis"" hat ein Paar Anführungszeichen.**
Richtig.

(7) **"""Eis""" hat zwei Paar Anführungszeichen.**
Richtig.

(8) **Man braucht länger, die Bibel zu lesen, als "die Bibel" zu lesen.**
Korrekt. Zuerst wird 'die Bibel' gebraucht, dann genannt.

(9) **Dieser Satz ist länger als "dieser Satz".**
Richtig.

(10) **"Le diable" ist der Name von le diable.**
Ist dieser Satz in Französisch oder in Deutsch geschrieben? In beiden Sprachen.

(11) **"Le diable" ist der französische Name des Teufels.**
Dieser Satz enthält kein Französisch! Die französischen Worte stehen in Anführungszeichen. Demnach wird eine Aussage über sie gemacht, sie werden aber nicht gebraucht. Eine Person, die kein Französisch kann, versteht den Satz (11) vollständig, kann aber mit den letzten zwei Worten von Satz (10) nichts anfangen.

Davon ausgehend bespricht Smullyan die Selbstbezüglichkeit von Sätzen, erklärt die Diagonalisierung, führt uns zu einer Formalisierung dieser Sprachkonstrukte, und zeigt die Gödelisierung der Aussagen. Damit kann dann der Gödelsche Unvollständigkeitssatz bewiesen werden.