

# NICHT-TRANSITIVE WÜRFEL

## 'transitiv':

Eine Beziehung (Relation) zwischen Objekten heißt transitiv, wenn aus  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$  folgt, dass auch  $A \rightarrow C$

Dies scheint eine ganz klare und offensichtliche Forderung im Rahmen unserer Logik.

Beispiele:

- $3 < 5$  und  $5 < 7 \Rightarrow 3 < 7$
- A schwerer als B, B schwerer als C, also ist A schwerer als C
- macht 'Kikeriki'  $\Rightarrow$  Hahn, Hahn  $\Rightarrow$  Vogel, also ist ein 'Kikeriki' ein Vogel
- Ich bin ein Wiener, ein Wiener ist ein Österreicher, ein Österreicher ist ein Europäer, also bin ich ein Europäer.

## ein einfaches Würfelspiel:

**2 Personen würfeln. Wessen Würfel eine höhere Augenzahl zeigt, gewinnt einen Punkt. Bei gleicher Augenzahl zählt dieser Wurf nicht und wird wiederholt.**

Es gibt *ehrliche* Würfel (alle Werte auf den Seitenflächen erscheinen mit gleicher Wahrscheinlichkeit) und *präparierte* ('gezinkte': Füllt man den Punkt des Einsers mit einem kleinen Metallstück, so erscheint der Sechser etwas häufiger als die übrigen Zahlen).

Klar: wer einen derart präparierten Würfel hat, wird das Spiel gewinnen. Wir spielen selbstverständlich ehrlich.

Eine Erweiterung lassen wir zu: Die Würfel müssen nicht mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sein, es dürfen sogar Zahlen mehrfach auftreten. (Übung: was ist, wenn die Augensumme der Würfel gleich sein muss?)

Beispiel:

Würfel W1 hat die Augen 0,2,4,6,8,10

Würfel W2 hat die Augen 3,3,3,4,6,8

Welcher Würfel ist 'besser'?

W1 zeigt	dann gibt es gegen W2	Gewinne 1	Gewinne 2	Remis
0	nur Gewinne für W2		6	
2	auch nur Gewinne für W2		6	
4	gegen die 3 Dreier von W2 gewinnt W1, 4 macht einen Gleichstand, die beiden 8er gewinnt W2	3	2	1
6	gegen 3,3,3,4 von W2 gewinnt W1, Rest W2	4	1	1
8		4		2
10		6		
	<b>GESAMT von 36 Möglichkeiten</b>	<b>17</b>	<b>15</b>	<b>4</b>

Der Würfel 1 ist also um eine Kleinigkeit 'besser' als Würfel 2.

Wir erwarten, dass der Spieler, der W1 besitzt, auf lange Sicht etwas mehr Gewinne für sich

verbuchen kann.  $P(W1 \text{ gewinnt}) = \frac{17}{17+15} = \frac{17}{32} \approx 0.531$

**Nun machen wir ein Spiel mit den folgend beschriebenen Würfeln:** Auf dem Tisch liegen 4 Würfel. Du darfst einen wählen, danach wähle ich einen. Wir würfeln einige Male und sehen, wer gewinnt. Du wirst mit Deiner Würfelwahl nicht zufrieden sein. Wähle einen anderen, Du darfst auch gerne den haben, den ich soeben benutzt habe. Ich wähle auch wieder einen Würfel und wir spielen. Wiederum wirst Du mit Deiner Wahl nicht zufrieden sein,.....

Wie lange dauert es, bis Du den 'besten' Würfel gefunden hast, der alle anderen schlägt?  
Hilft die 'Punktesumme' oder die durchschnittliche Augenzahl bei der Beurteilung?

### Beispiele für geeignete Würfel

Würfel A	Würfel B	Würfel C	Würfel D	
0 0 4 4 4 4	3 3 3 3 3 3	2 2 2 2 6 6	1 1 1 5 5 5	viele gleiche Werte, aber keine Gleichstände

A gewinnt gegen B mit 24:12 (also 2/3 Wahrsch.), B gegen C ebenfalls, C gegen D, D gegen A genauso. **Es gibt hier keinen besten Würfel, aber zu jedem Würfel einen besseren!** Und diese Eigenschaft ist es, die der Bezeichnung 'nicht transitiv' entspricht.

Weitere Würfelsätze zum Experimentieren:

Würfel A	Würfel B	Würfel C	Würfel D	
2 3 3 9 10 11	0 1 7 8 8 8	5 5 6 6 6 6	4 4 4 4 12 12	nicht so viele Wiederholungen

Würfel A	Würfel B	Würfel C	Würfel D	
1 2 3 9 10 11	0 1 7 8 8 9	5 5 6 6 7 7	3 4 4 5 11 12	nicht so viele gleiche Werte, aber Einstände möglich

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind jeweils 11:6 bzw. 11/17

### Berechnung und Simulation in Python:

```

dice1A = [0,0,4,4,4,4]
dice1B = [3,3,3,3,3,3]
dice1C = [2,2,2,2,6,6]
dice1D = [1,1,1,5,5,5]

dice2A = [2,3,3,9,10,11]
dice2B = [0,1,7,8, 8, 8]
dice2C = [5,5,6,6, 6, 6]
dice2D = [4,4,4,4,12,12]

dice3A = [1,2,3,9,10,11]
dice3B = [0,1,7,8, 8, 9]
dice3C = [5,5,6,6, 7, 7]
dice3D = [3,4,4,5,11,12]

def chances(dice1,dice2):
    win1,win2,tie = 0,0,0

```

```

for toss1 in dice1:
    for toss2 in dice2:
        if toss1>toss2: win1 += 1
        elif toss2>toss1: win2 += 1
        else: tie += 1
print "dice1, dice2, tie: ",win1,win2,tie

```

Aufruf etwa `chances(dice2B,dice2C)`

### Oder als **Simulation**:

```
import random
```

```

def game(dice1,dice2,num):
    win1,win2,tie = 0,0,0
    for x in range(num):
        throw1 = random.choice(dice1)
        throw2 = random.choice(dice2)
        if throw1>throw2: win1+=1
        elif throw1<throw2: win2+=1
        else: tie+=1

    print "Gewinn1, Gewinne2, Unentschieden:",win1,win2,tie

```

Aufruf: `game(dice1A,dice1B,1000)` zeigt den Punktestand nach 1000 zufälligen Einzelspielen.

### Theorie:

Diese 'paradoxen' Würfel wurden von Bradley Efron (Statistiker an der Stanford University) erfunden.

Die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit mit 4 Würfeln ist  $2/3$ .

Mit 3 Objekten kommt man bestenfalls auf 0.618, und die einzelnen Augenzahl-Mengen besitzen mehr als 6 Elemente, passen also nicht auf einen Würfel.

Für mehr Objekte (große Würfelzahl) strebt die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit nach  $3/4$ .

Noch ein Beispiel mit gleicher Augensumme 21 (Durchschnittswurf 3.5) wie der 'normale' Würfel

Würfel A	Würfel B	Würfel C	
1 2 3 3 6 6	1 1 2 5 6 6	2 2 4 4 4 5	

Hier gewinnt A:B=16:13 (7 Remis), B:C=17:16 (3 Remis), C:A=18:16 (2 Remis)

In der folgenden eleganten Version treten alle Zahlen von 1 bis 24 je 1 mal auf:

Würfel A	Würfel B	Würfel C	Würfel D	
3 4 5 20 21 22	1 2 16 17 18 19	10 11 12 13 14 15	6 7 8 9 23 24	

Wahrscheinlichkeiten: jeweils die maximalen  $2/3$ !

Literatur: Gardner, Colossal Book of Mathematics, Chapter 22/23