

Hamilton-Wege

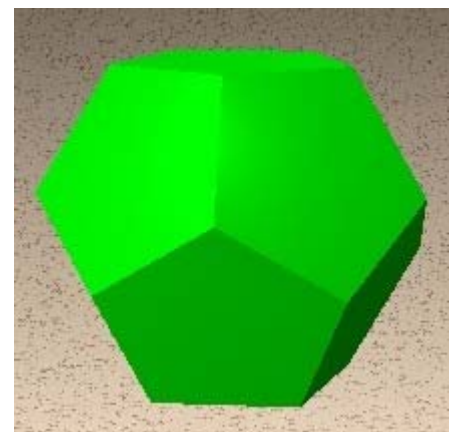
Nötige Vorkenntnisse: Graphenbegriff, Euler-Wege, Polyeder



1589 erschien in London ein neuartiges Geduldspiel, das vom Mathematiker Sir William Rowan Hamilton (Quaternionentheorie, Hamilton-Operator) erfunden wurde. Er nannte es 'The Icosian Game'. Im deutschsprachigen Raum wurde es als 'Die Reisenden auf dem Dodekaeder oder eine Reise um die Welt' vertrieben.

Es bestand aus einem hölzernen Dodekaedermodell mit einem Handgriff. Jede Polyederecke war mit einem Buchstaben bezeichnet und

wies ein Loch auf, in das ein kleiner Holzstift als Markierung gesteckt werden konnte.



Die Kanten des Dodekaeders waren farblich hervorgehoben und sollten ein Straßennetz symbolisieren, das 20 Städte rund um die Welt verbindet. Die erste Aufgabe des Spieles bestand darin, Rundreisen aufzufinden, die jede Stadt genau einmal besuchen sollten.

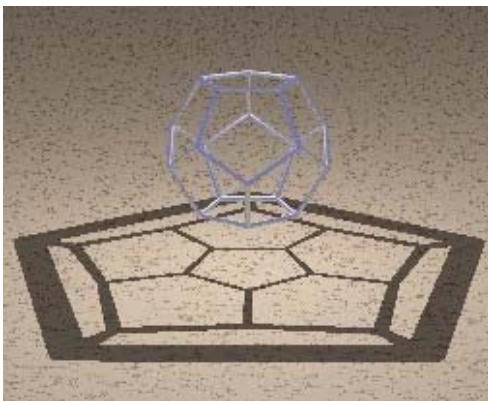
(Später mussten bei manchen Aufgaben noch zusätzliche Anfangsbedingungen erfüllt werden, wie etwa: 'Finden Sie eine Rundreise, die mit den Städten B, C, D, F in dieser Reihenfolge beginnt' oder mathematische Aufgaben wie 'Kann es eine Reise durch alle Städte geben die mit B, C, K, J beginnt und bei S endet?')

Später brachte Hamilton eine Variation heraus, bei der auf einem Ikosaeder alle Flächen (alle Länder der Erde) mittels Rundreisen besucht werden sollten.

Beide Spiele waren in der mathematisch wenig gebildeten und interessierten Gesellschaft kein Verkaufserfolg, doch sind sie heute wunderbare Beispiele zu Denkaufgaben der Graphentheorie.



Aufgabenstellung:



Anstatt mit einem dreidimensionalen Objekt zu hantieren, wollen wir ein möglichst gleichwertiges flaches Modell finden. Wir versuchen, die Wege als Kanten eines Graphen zwischen den Städten als Knoten zu sehen:

Von jeder Stadt gehen drei Straßen aus, es gibt insgesamt 20 Städte.

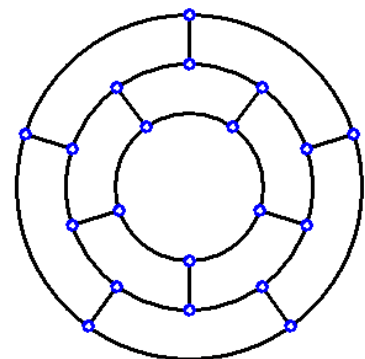
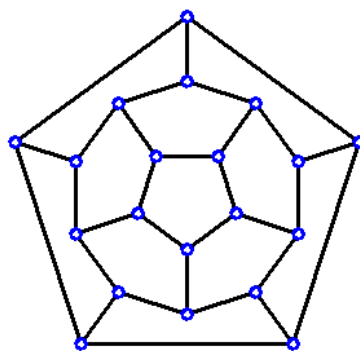
Ein Modell dieser Situation der 30 Straßen lässt sich durch Aufdehnen und Flachdrücken eines oben offenen Dodekaeders herstellen, oder als Schattenwurf eines Kantenmodells.



Die Aufgabe ist es nun, einen geschlossenen Weg auf dem Graphen zu finden, der jeden Knoten enthält.

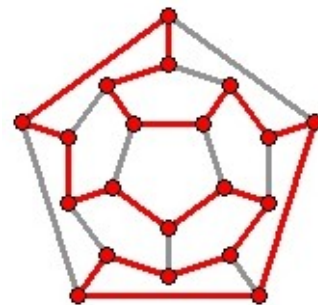
Im Unterschied zu den Euler-Wegen muss aber nicht jede Kante besucht werden.

Wir arbeiten also mit einem topologisch äquivalenten Graphen: 20 Knoten von Grad 3, 30 Kanten. 29 Seitenflächen des Dodekaeders sind zu erkennen, die dreißigste liegt 'außen'.



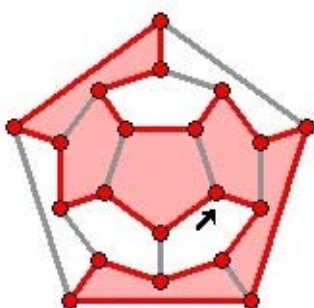
Rätselphase:

Jeder Schüler erhält ein Blatt mit mehreren vorgedruckten Graphen. Er soll eine Lösung für das Rundreiseproblem – einen geschlossenen Weg durch alle Knoten – finden. Dies gelingt nach einigen Anläufen ganz gut.



Zusammenschau:

Beim Vergleichen der Lösungen wird man feststellen, dass kaum zwei Schüler ein identes Ergebnis vorlegen. Einige kann man durch Drehung ineinander überführen, dies sieht man bei farbiger Markierung des 'Inneren' der Lösung leicht. Aber wie viele wirklich unterschiedliche Lösungen gibt es denn nun?



Jeder Schüler wählt einen beliebigen Knoten seiner Lösung und zeichnet einen kleinen Pfeil in eine der möglichen Wegerichtungen. Beim Weitergehen gelangt man nun immer an Kreuzungen mit zwei möglichen Abzweigungen – eine rechts, eine links relativ zueinander.

Man kann den Lösungsweg nun als Folge von 'rechts-links' Kommandos angeben.

Im abgebildeten Fall: rrr lll rlr lrr rrr lll rlr l. Beginnt man an einem späteren Punkt, oder dreht die Gehrichtung um, erhält

man die gleiche Buchstabenfolge, allerdings von einer anderen Stelle an. Im abgebildeten Fall bei Wegumkehr lrlrrrrlllrlrrrrlll.

Beim Vergleich aller gefundenen Lösungen stellt man fest, dass jede von ihnen einer der beiden Folgen entspricht:

Typ 1: rrr lll rlr lrr rrr lll rlr l

Typ 2: lll rrr lrlr lll rrr lrlr

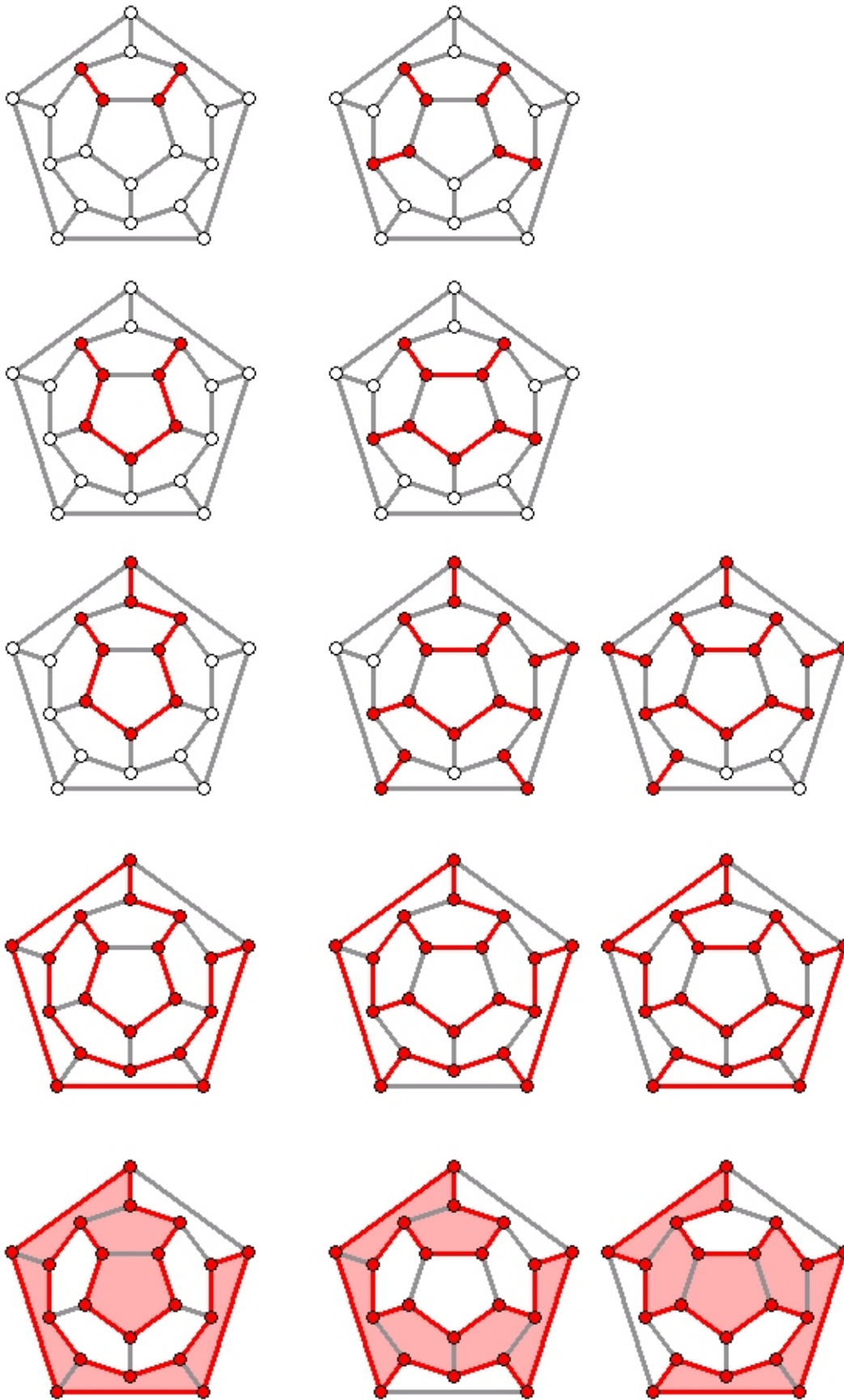
Genauere Analyse zeigt, dass eine Umkehr der Gehrichtung den Typ nicht ändert, dass aber ein Typ durch Spiegelung der Skizze in den anderen übergeht.

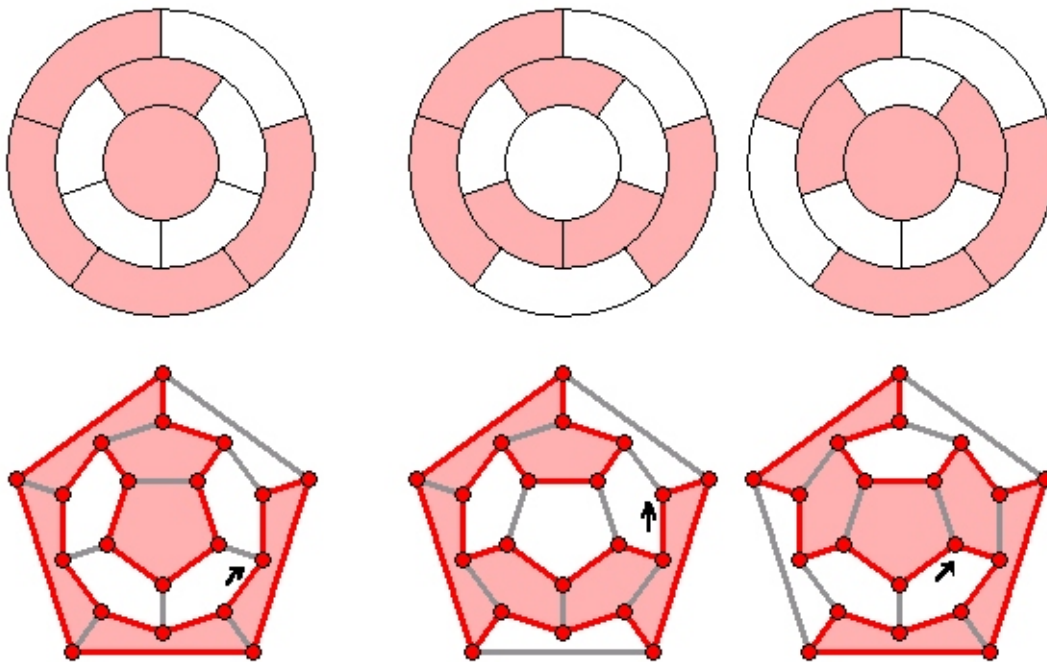
Durch Probieren hat man entdeckt, dass alle Lösungen irgendwie 'gleich' sind. Doch wie wäre es mit einer systematischen vollständigen Lösungssuche? Die grundlegende Idee soll dabei sein: Der Graph zeigt drei Ringe mit je fünf Verbindungskanten dazwischen. Wir überlegen, wie oft bei einer Rundreise ein Wechsel des Rings (nach außen oder innen) stattfinden kann. 'Einmal' ist unmöglich, es muss der Weg ja wieder zurückführen. 'Zweimal' ist möglich, 'viermal' ebenso, ungerade Zahlen scheiden aus.

Die Aufgabe zerfällt also in 4 Teile geringeren Umfangs:

2	Wechsel von innen zur Mitte, 2 von der Mitte nach außen
2	
4	
4	

Systematische Lösung (nur die möglichen Fälle):





Wir finden genau 3 Lösungen. Weitere drei entstehen durch Spiegelung dieser Skizzen. Wieso? Im dritten Schritt der obigen Lösung haben wir willkürlich die Symmetrie aufgegeben – und dieses hätten wir auch unter Vertauschung von rechts und links tun können.

Doch eigentlich ist es nur **eine einzige Lösung** – mithilfe der Abzweigekommandos lautet sie (mit Spiegelbild)

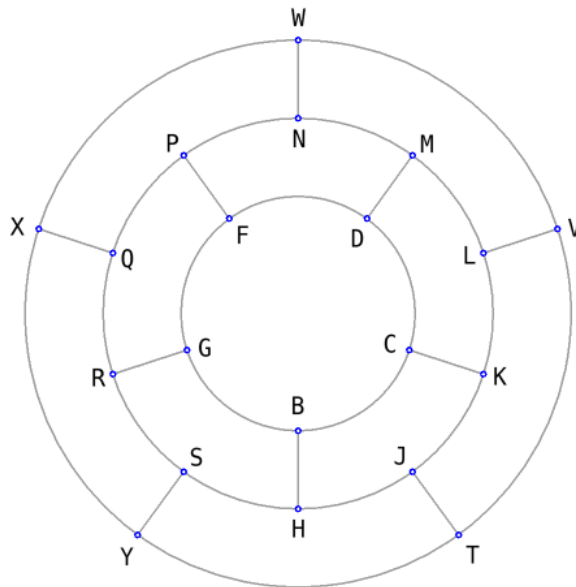
TYP 1: **rrr lll rlr1 rrr lll rlr1** oder **(rrr lll rlr1)²**
TYP 2: **lll rrr lrlr lll rrr lrlr** oder **(lll rrr lrlr)²**

Jede Zeile enthält zweimal die gleiche Buchstabenfolge: offenbar sind 'Hinweg' und 'Rückweg' der Rundreise in dieser Sprechweise gleich!

Aber woher kommt die 'Verdreifachung' des Resultates: Wir nehmen drei reale Modelle eines Dodekaeders und markieren das umwanderte Gebiet farbig. Durch passende Drehung sehen wir: alle Dodekaeder tragen das gleiche Muster: schlängelförmig sind 6 der 12 Flächen markiert. Das markierte und das unmarkierte Gebiet sind übrigens deckungsgleich. Eine einzige Fläche liegt unsymmetrisch. Markieren wir statt dieser die einzig mögliche Fläche daneben, erhalten wir das Bild der gespiegelten Lösung!

Unser flaches Modell für den Dodekaeder war gut gewählt – wir haben die Lösungen gefunden. Doch es war nicht perfekt in allen Details. Eine Drehung des Dodekaeders im Raum ist einfach vorstellbar. Dass dadurch aber die drei obigen Graphen ineinandergedreht werden, ist im flachen Graphen nicht leicht zu erkennen.

(Querverweis: Schattenwurf von 4D Gebilden im 3D Raum, Tesseract)



Hamilton'sche Aufgaben:

1. Die 'klassische' Variante: Finde eine Rundreise mit dem Start FDCBG
2. Es werden drei Startorte und der Zielort für eine nicht geschlossene Reise vorgegeben: starte mit FDC und ende bei T
3. Einige Startorte sind vorgegeben, dann soll es nach einer gewissen Anzahl von Zügen keine Möglichkeit der Resiefortsetzung mehr geben (Sackgasse): starte mit QXYT, nach 6 weiteren Stationen soll die Fortsetzung unmöglich sein (Lösung: QXYT JHBGRS)
4. Reisen mit ausgeschlossenen Städten: der Beginn der Reise lautet FDC, B soll die letzte Station sein, der Knoten M darf nicht besucht werden

Lösungsanzahl der Rundreiseaufgaben

Können wir aus der Startfolge möglicherweise sofort die Anzahl der möglichen Lösungen erkennen?

1 Knoten vorgegeben:

Das ist keine Einschränkung für eine Rundreise. Jede unserer drei Lösungen kann gespiegelt und in 5 Positionen gedreht werden: $3 \times 2 \times 5 =$ **30 Lösungen**.

Andererseits sind das alle Lösungen von '3 Knoten' in jede der drei möglichen Richtungen gedreht.

2 Knoten vorgegeben:

z.B. G,R. Damit ist eine Kante fixiert. Um R liegen Q, G und S. Durch die Vorgabe kann der Weg nicht SRQ sein, aber GRS und GRQ sind erlaubt. Es fällt demnach ein Drittel aller Lösungen weg, wir erhalten hier **20 Lösungen**. Oder: alle Lösungen von '3 Knoten' in 2 mögliche Richtungen.

3 Knoten vorgegeben:

damit ist eine Abzweigungsart r oder l festgelegt. Wie oft kommt etwa r in unseren Typen vor? 5 mal im Typ 1, 5 mal im Typ 2 (nur die erste Hälfte der Folge betrachten, die zweite ist identisch und liefert die selbe Lösung, sie ist also

redundant). Insgesamt **10 Lösungen**.

4 Knoten vorgegeben:

Das bedeutet eine der Folgen rr, rl, lr und ll. Wie oft erscheinen diese in den Rundreisen? rr bzw. ll 2+2 mal, rl bzw. lr 3+3 mal. **4 oder 6 Lösungen**.

5 Knoten vorgegeben:

das entspricht drei Symbolen: rrr, rrl, rlr, lrr und gespiegelt. **2 oder 4 Lösungen**.

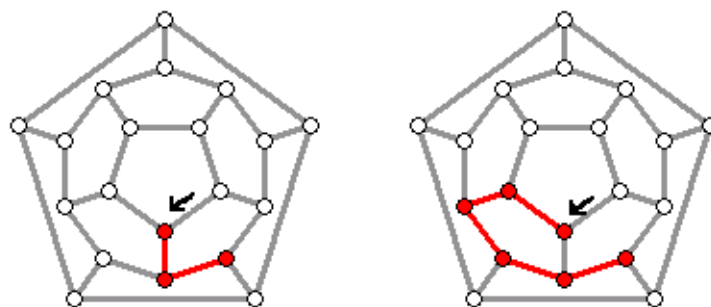
6 Knoten vorgegeben:

Bei 4 Symbolen kann erstmals eine Folge auftreten, die in keinem Typ enthalten ist, etwa rrrr. **Keine, 1, 2, oder 3 Lösungen**.

7 Knoten vorgegeben: **Keine, 1 oder 2 Lösungen**

8 oder mehr Knoten vorgegeben: **Keine oder 1 Lösung**.

Ein Rundreisegenerator



Offensichtlich führt dir Anweisung ll zum selben Ziel wie rlllr

Wir beginnen mit dem Kreis `lllll` und ersetzen schrittweise `ll` -> `rlllr`:

`lllll` -> `rlllr``lll` -> `rrlllr``rlrrlllr``l` -> `rrrlllr``rlrlrrrlllr``rlrl`

und erhalten somit die komplette Wegbeschreibung einer vollen Rundreise!

Höhere Mathematik

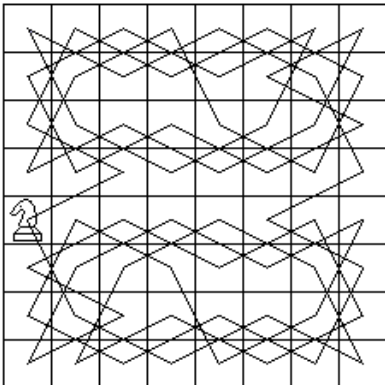
Auf den ersten Blick scheinen Euler-Wege und Hamilton-Wege ähnlich zu sein. Bei näherer Betrachtung zeigen sie allerdings deutliche Unterschiede.

Für die Existenz von Euler-Kreisen gibt es ein einfaches Argument (alle Knoten von geradem Grad, Satz von Euler) und ihre Konstruktion eine simple Vorschrift (einen einfachen Teil-Kreis zeichnen und schrittweise weitere Nachbarkreise einbinden).

Das Auffinden von Hamilton-Wegen ist schwieriger, sogar **sehr** schwierig. Dieses Problem scheint zur Gruppe der nicht in polynomialer Zeit lösbaren Probleme zu gehören, für die es keinen effizienten Algorithmus zur vollständigen Lösung gibt (zum Glück genügen oft Strategien zum Auffinden einer 'recht guten' Lösung, wie etwa beim Problem des Handlungsreisenden für Leitungsnetze, Postverkehr,...)

Abschweifung

Eine bekannte Aufgabe ist das Auffinden eines 'Rösselsprunges' auf einem Schachbrett: Ein Springer soll alle Felder des Brettes besuchen. Schon Euler beschäftigte sich mit der Lösung.



Bei genauerer Betrachtung ist ein Rösselsprung eine Hamilton-Rundreise!

Für diesen Fall existiert sogar eine effiziente Heuristik (Warnsdorff 1838):

Man fängt irgendwo an. Auf allen erreichbaren Feldern zählt man nun ab, wie viele Möglichkeiten zur Fortsetzung dieses Feld besitzt. Das Feld mit der kleinsten Zahl (stärkste Einschränkung) wird für den Folgezug gewählt.

Warum ist das kein Algorithmus?

Seine Funktionstüchtigkeit ist nur dadurch bestätigt, dass man mit Computerhilfe alle Möglichkeiten durchgetestet hat (gehören alle möglichen Rösselsprünge der Warnsdorff-Regel?). Dass diese Vorschrift auf alle lösbaren Brettgrößen (beispielsweise ist 2x3 unlösbar) angewendet werden kann, ist unwahrscheinlich. Computertests ergaben, dass man bei großen Brettern (über 76 Felder Seitenlänge) nach der Warnsdorff-Regel in Sackgassen laufen könnte.

Binärzahlen, Türme von Hanoi, Rundreise auf dem n-Würfel

DCBA		Beispiel für $n=4$, jedes n wäre möglich.
0001	A	Wir schreiben die n -stelligen Binärzahlen von 1 an auf. Mit A,B,C,D benennen wir die einzelnen Bits von hinten nach vorne. Daneben schreiben wir, welches Bit von hinten (rechts) gesehen den ersten Einser zeigt.
0010	B	
0011	A	
0100	C	
0101	A	
0110	B	Die Türme von Hanoi mit den Scheiben A (kleinste), B, C, D lösen wir durch die Züge: Erst Scheibe A, dann B, dann A, dann C,....
0111	A	
1000	D	
1001	A	
1010	B	Die Raumrichtungen eines 4-dimensionalen Würfels bezeichnen wir mit A,B,C,D
1011	A	
1100	C	Eine Hamilton-Rundreise auf diesem Würfel erhalten wir durch Bewegung entlang folgender Dimensionen vom Ursprung aus: erst entlang A, dann B, dann A, dann C,.... und zuletzt zurück zum Ursprung.
1101	A	
1110	B	
1111	A	

Nachtrag

Für heutige Schüler ist schnell klar, dass Hamiltons Ikosaederspiel ganz genau dem Dodekaederspiel entspricht. Die Vorschrift 'Besuche alle Flächen durch überqueren von Kanten' ist dual zu 'Besuche alle Knoten durch Wanderung entlang von Kanten'.