Die Euler'sche Zahl

Goldmariechen ist ins Finanzgeschäft eingestiegen. Im ganzen Märchenland genießt ihre "Mother Hulda's Piggy Bank" einen guten Ruf. Heuer bietet Mariechen zu Jahresbeginn das Hans-im-Glück-Sparbuch an: Sein Zinssatz beträgt märchenhafte 100%.

Rotkäppchen überlegt: "Wenn ich einen Euro einzahle und bis zum Jahresende warte, erhalte ich zu meinem Startkapital von 1€ ganze 100% davon, also nochmals 1€, als Zinsen dazu - das macht zusammen zwei Euro. Super!"

Da kommt der (ehemals böse) Wolf vorbei und gibt Rotkäppchen einen Tip. Er sagt: "Wenn du nach einem halben Jahr dein ganzes Geld abhebst, bekommst du doch die Hälfte der Jahreszinsen ausbezahlt - also zu deinem Euro einen halben dazu. Wenn du dieses Geld sofort wieder einzahlst, bekommst du im restlichen halben Jahr die Zinsen für eineinhalb Euro, also die Hälfte von eineinhalb Euro, noch dazu. Das scheint mir dann mehr zu ergeben, als zwei Euro, denn ohne Abheben würde auch im zweiten Halbjahr nur ein Euro verzinst, mit meinem genialen Trick sind es aber 1½ Euro. Das ergibt dann am Ende ..." Wölfchen ist nicht so gut im Kopfrechnen und bekommt einen Schwächeanfall.

Das kluge Rotkäppchen denkt aber schon viel weiter und fragt sich, wie viel Geld es am Ende des Jahres auf seinem Sparbuch hätte, wenn es nicht nur einmal abhebt, das Jahr also in 2 Teile teilt, sondern 2 mal (drei Teile), 3 mal, oder monatlich, täglich, stündlich,... Wäre dann nicht noch viel mehr Geld auf dem Sparbuch? Der (ehemals böse) Wolf versucht sich vorzustellen, wie Rotkäppchen jede Sekunde das ganze Geld abhebt und sofort wieder einzahlt. Er erleidet einen weiteren Schwächeanfall und wird ohnmächtig.

Rotkäppchen ist so begeistert von dieser Idee, dass es den (ehemals bösen) Wolf gleich zu Kaffe, Kuchen und Großmutter einlädt. Könnte man mit diesem Trick Millionen scheffeln? Rotkäppchen holt Kugelschreiber, Papier und Taschenrechner und beginnt zu schreiben:

n = 1	1 €			1+1 €	2 €
n = 2	1 €	1+1·½	1.5		
n = 3	1				
n = 4	1	1.25	1.5625	1.953125	2.44140625
		$1 + 1\cdot\frac{1}{4}$	$(1+\frac{1}{4}) + (1+\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{4} = (1+\frac{1}{4})^2$	$(1+\frac{1}{4})^2 + (1+\frac{1}{4})^2\cdot\frac{1}{4} = (1+\frac{1}{4})^3$	$= (1+\frac{1}{4})^4$
n = 12	1				
n = 365	1				

N = 1000

N = 1000000

N = sekündlich

Sie sieht: Das berechnete Jahresguthaben strebt immer mehr gegen eine Zahl.
Man nennt diese die **Euler'sche Zahl** und bezeichnet sie mit dem Buchstaben **e**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e$$

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912744374704723069697720931014169283681902551510865746377211125238978442505695369677078544996996794686445490598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701983767932068328237646480429531180232878250981945581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456354906130310720851038375051011574770417189861068739696552126715468895703503540.......

Was ist e für eine Zahl?

Du kennst rationale Zahlen, das sind die Brüche. Man kann e nicht als Bruch anschreiben, e ist irrational.
In den irrationalen Zahlen kennen wir etwa die Wurzeln als Lösungen von Gleichungen (wie etwa $3781x^{275}-94256x^{89}+23x^{26}-1004x^{5}-20 = 0$). Es gibt keine solche Gleichung, deren Lösung e wäre. Damit ist e keine 'algebraische', sondern **eine transzendente Zahl**. Du kennst eine einzige weitere solche Zahl: π.

Wie berechnet der Taschenrechner e?

Es gibt eine hübsche Formel (die ich Dir in Deiner Schullaufbahn nicht beweisen kann, nur mithilfe der binomischen Formel plausibel machen...)

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert sehr schnell, damit kann der Taschenrechner e durch Grundrechenarten finden.

Willst Du berühmt werden?

Den Beweis zu führen, ob eine Zahl rational ist oder nicht, ist manchmal recht einfach (Du hast es etwa für die Wurzel aus 2 gelernt). Den Beweis zu führen, ob eine Zahl tatsächlich transzendent ist, ist immer äußerst schwierig. Bis heute ist es unbekannt, ob etwa π-e oder π/e oder π^e transzendent sind (man vermutet es). Wenn Du diese Fragen entscheiden kannst, wirst Du weltberühmt.