Jede Menge Zahlen

(Beachte auch die Unterlagen über hilfreichen Python-Funktionen zur Lösung der folgenden Aufgaben!)

Abnormales Kürzen

Man kann einen Bruch auf offensichtlich falsche Arten kürzen, indem man oben und unten gleiche Ziffern wegstreicht. Mir dieser Methode vereinfacht man etwa

$\frac{16}{64} = \frac{1\breve{6}}{\breve{6}4} = \frac{1}{4}$ durch Wegstreichen der Ziffer 6.

Erstaunlicherweise ist das Ergebnis dieser fehlerhaften Kürzung jedoch korrekt! Hier liefert also eine *falsche* Rechnung ein *richtiges* Resultat. (55/55=5/5 oder 50/60 = 5/6 sind trivial und gelten nicht!)

Aufgabe:

- Finde alle zweistelligen Paare mit dieser Eigenschaft (55/55=5/5 oder 50/60 = 5/6 sind trivial und gelten nicht!)
- Finde auch drei-, vierstellige Paare!

Armstrong-Zahlen

(Sie sind ein Spezialfall der ÜBERPERFEKTEN ZAHLEN bzw. der NARZISS-ZAHLEN)
Eine n-ziffrige Armstrong-Zahl hat die Eigenschaft, dass die Summe der n-ten Potenzen ihrer Ziffern gleich der ursprünglichen Zahl ist.
z.B. $371 = 3^3+7^3+1^3$, $8208 = 8^4+2^4+0^4+8^4$, ...
Einstellige Zahlen (0..9) sind trivialerweise Armstrong-Zahlen.

Aufgabe:

- Finde die kleinste (nichttriviale) Armstrong-Zahl
- Finde alle 2- und 3-stelligen Armstrong Zahlenahlen
- Untersuche 4-,5-,... stellige Zahlen
- (schwieriger) Untersuche die Situation in anderen Zahlenbasen

Befreundete Zahlen (amicable numbers)

Ein Zahlenpaar (a,b) heißt befreundet, wenn a gleich der Teilersumme von b ist und b gleich der Teilersumme von a. (1 zählt hier ausnahmsweise als Teiler, die Zahl selbst nicht.)
Leider sind sie SEHR selten.
Pythagoras selbst war ständig auf der Suche nach befreundeten Zahlenpaaren. Er sagte einmal 'Ein Freund ist jemand, der das anderen Ich ist, so wie die Zahlen 220 und 284'.

Die arabischen Gelehrten des Mittelalters schrieben Zahlen große Bedeutung fürs menschliche Leben zu. Speziell waren sie von diesen befreundeten Zahlen beeindruckt. So waren sie der Meinung, man könne eine Frau für sich gewinnen, wenn man ihr etwa einen Zettel mit einer Zahl eines befreundeten Paares zusteckt oder ans Gewand heftet, und die zugehörige zweite Zahl bei sich behält. (Lit: Pickover, 'das Göttliche')

Aufgabe:
- Finde alle befreundeten (und daher erotisch wirksamen) Zahlenpaare bis 1000.

Vollkommene Zahlen

Ist eine Zahl mit sich selbst befreundet, so heißt sie vollkommen. Zum Beispiel hat 6 die Teiler 1,2,3 und 1+2+3 ergibt wiederum 6, oder 28 = 1+2+4+7+14. Schon Euklid war eifrig auf der Suche nach solchen Zahlen.

Aufgabe:
- Finde weitere vollkommene Zahlen (Achtung: bis 10000 gibt es nur 4 davon, die fünfte ist schon 33 550 336, die achte wurde von Euler entdeckt und hat 19 Stellen. Man kennt bis heute nur etwas mehr als 30 vollkommene Zahlen)

Vollkommene Zahlen, Teil 2

Die Funktion ó(n), die Teilersummenfunktion, gibt die Summe aller Teiler von n an. Hier wird 1 als Teiler mitgezählt, n selbst jedoch nicht.
Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler inklusive 1 ist. Zusätzlich wollen wir untersuchen, für welche Zahlen die Teilersumme größer als n ist, und für welche Zahlen sie kleiner ist.

ó(n) < n : arme Zahl (deficient number)
ó(n) = n : vollkommene Zahl (perfect number)
ó(n) > n : reiche Zahl (abundant number)

Aufgabe:

- Finde alle vollkommenen Zahlen bis 1000 oder 10000.
- Finde alle reichen Zahlen bis 100
- Finde alle armen Zahlen bis 100

Binomialkoeffizient

Er gibt an, auf wie viele Arten man k Dinge aus einer Menge von n (unterschiedlichen) Dingen auswählen kann.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Der erste Bruch verwendet direkt die Faktorielle-Funktion, der zweite ist die gekürzte Version (kürze immer durch den größeren Faktor im Nenner, das gibt kleinere Zahlen). Beachte, dass letzterer Bruch genausoviele Faktoren im Zähler wie im Nenner besitzt.
Beispiel: 3 Schüler von 5 kann man auf 5!/(3!2!) = 120/12 = 10 Arten auswählen.
Aufgabe:
- Schreib eine Funktion `binom(n,k)` zur Berechnung dieses Wertes mithilfe der Faktoriellen
- Genauso mit der 'gekürzten' Version. Arbeite von rechts nach links mit abwechselndem Multiplizieren/Kürzen. Dann ist jedes Teilergebnis ganzzahlig (z.B. durch 3: dann standen oben

bereits 3 aufeinanderfolgende Zahlen und davon muss eine ein Vielfaches von 3 sein).
- (schwieriger) Genauso mit dem rechtesten Ausdruck. Beachte, dass der Bruch selbst nicht unbedingt kürzbar ist!
- Verwende die Rekursionsformel aus dem Pascal-Dreieck (keine großen Zahlen versuchen!):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Für gute Grafiker: Stelle das Pascaldreieck auf dem Bildschirm dar. Färbe nur die Punkte, deren Wert durch 2 oder 3 oder 4,... teilbar ist. Lassen sich diese Muster erklären?

Das Collatz-Problem

Diese Aufgabe wurde 1937 von L. Collatz gestellt. Sie beruht auf folgender Iterationsvorschrift, die mit einer beliebigen natürlichen Zahl m begonnen wird und eine nächste Zahl n_{NEU} liefert:

$$n_{NEU} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 3\mathrm{n}+1 & n \text{ ungerade} \end{array} \right\}$$

Der sich ergebende Typ von Folge heißt auch 'Hagelkornfolge' (hailstone numbers), da die Zahlen im Verlauf der Iteration oft wie Hagelkörner in der Gewitterwolke mehrmals hoch hinauf wandern, und irgendwann später zu Boden stürzen, wo sie noch etwas herumkollern (1->4->2->1).
Nimmt man an, dass gerade und ungerade Zahlen halbwegs gleich verteilt sind, so werden die Folgenelemente einmal halbiert, dann aber verdreifacht. Entspricht das insgesamt nicht einem unbeschränkten Wachsen?
Alle Experimente haben bis heute ergeben, dass die Folge irgendwann auf 1 kommt.
Warum ist das Problem so berühmt? Weil noch kein Mensch bisher einen Beweis gefunden hat, dass dem tatsächlich IMMER so ist!

Aufgabe:

- Berechne für einen Startwert n die Hagelkornfolge, bis der Wert 1 erreicht wird.
- Bestimme für einen Wert n, wie viele Schritte er dabei braucht.
- Durchforste alle Zahlen von 1 aufsteigend nach 'Rekordlern', also Startwerten, die eine 'noch längere' Kette ergeben, als bisher da war. Zeig die Werte und die Folgenlänge an.

Fröhliche Zahlen (Happy Numbers)

Nimm eine natürliche Zahl n und bilde die Summe der Quadrate ihrer Ziffern. Mit dem Ergebnis verfahre genauso. Erhält man auf diese Weise irgendwann einmal das Ergebnis 1, so nennt man n eine fröhliche Zahl.
Bsp. 19 -> 82 -> 68 -> 100 -> 1, also ist 19 fröhlich.
Nicht fröhliche Zahlen heißen traurig (unhappy) und bei deren Berechnung landet man gelegentlich in einer periodischen Schleife. 4 -> 16 -> 37 -> 58 -> 89 -> 145 -> 42 -> 20 -> 4 ...
Beachte: Jede Vertauschung der Ziffern einer (un)fröhlichen Zahl ist wiederum (un)fröhlich.

Aufgabe:

- Berechne alle 1 bis 3 stelligen glücklichen Zahlen
- Gib immer nur die kleinste der möglichen Vertauschungen der Ziffernfolge aus! (schwieriger)

Glückliche Zahlen (Lucky Numbers)

Schreib alle ungeraden Zahlen an: 1,3,5,7,9,11,....
Die erste ungerade Zahl >1 ist 3, streiche also jede dritte Zahl aus dieser Liste. Die nächste verbliebene Zahl ist 7, streiche nun alle siebenten Zahlen aus der Liste usw.
Es ergibt sich 1,3,7,9,13,15,21,25,....
Viele Eigenschaften der Primzahlen gelten auch für die glücklichen Zahlen!

Aufgabe:

- Berechne die ersten 40 oder mehr glücklichen Zahlen.

Josephus-Permutation

n Personen stellen sich auf den Plätzen 1,...,n auf. Bei der ersten Person beginnt man jede k-te Person auszuzählen (zyklisch geschlossen). Diese scheidet aus, die Personen rücken auf und vom Nachfolger des Ausgeschiedenen an wird weitergemacht, bis nur mehr eine einzige Person übrigbleibt. Das entspricht etwa dem Vorgehen von Kindern bei einem Auszählreim.
(Details, Erweiterungen und die blutige geschichtliche Überlieferung erfährst Du im Unterricht!)

Aufgabe:

– Wenn n und k gegeben sind: an der wievielten anfänglichen Position stand die Person, die schließlich übrigbleibt?

Kaprekar-Zahlen

Nimm eine n-stellige natürliche Zahl z. Bilde z^2 und addiere die aus den rechten n Stellen gebildete Zahl des Ergebnisses zu der aus den n oder n-1 linken Stellen gebildeten. Ist dieses Ergebnis gleich z, so ist z eine Kaprekar-Zahl.
Beispiel: 9 -> 81, 8+1 = 9, also ist 9 eine Kaprekarzahl.
297 -> 297^2 = 88209, und 88+209=297, also ist 297 auch eine.

Aufgabe:

– Berechne die Kaprekar-Zahlen bis 1000 (oder mehr)

Die Look-and-Say Folge

Die ersten Elemente dieser Folge, deren Bildungsgesetz Du selbst herausfinden musst, sind

```
     1
    11
    21
  1211
111221
312211
```

Diese Folge hat viele überraschende Eigenschaften (Conways Konstante, Periodensystem der Look-and-Say-Elemente, Kosmologisches Theorem,..)!

Aufgabe:

– Schreib ein Programm, das diese die Folge berechnet und die ersten n Elemente anzeigt.
– Mathematisch: Was ändert sich, wenn man nicht mit 1 sondern mit 2,3,...9 beginnt?

McNugget-Zahlen

Ursprünglich wurden ChickenMcNuggets in Schachteln zu 6, 9 oder 20 Stück verkauft. Alle Zahlen, die man durch eine geschickte Bestellung erhalten kann, sind McNugget-Zahlen. Beispiel: 21 ist eine, weil sie aus 2 Sechserpacks und einem 9erpack entstehen kann.

Aufgabe:

- Berechne alle Zahlen, die KEINE McNugget-Zahlen sind!

Die Max-Folge und die Mex-Folge

Beginne mit einer Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, etwa (1,4,3,2). Weitere Folgenelemente der **Max-Folge** findet man so: Bilde symmetrisch Summen der Zahlen 1+2, 4+3, also 3 und 7. Das Maximum 7 dieser Werte ist das nächste Element. Formal: $a_{n+1} = \max_i\{a_i+a_{n-i}\}$. Aus (1,4,3,2,7) bildet man nun die symmetrischen Summen 1+7, 4+2, 3+3 und erhält als maximalen Wert 8. Nun lautet die Folge (1,4,3,2,7,8). Es folgen die weiteren Elemente 11,12,15,16,...

Mex steht für '**m**inimum **ex**cluded value', das bedeutet für eine Teilmenge der natürlichen Zahlen (inklusive 0) den kleinsten **nicht** in dieser Menge enthaltenen Zahlenwert.
Die **Mex-Folge** einer endlichen Startmenge $\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ besteht aus allen Zahlen, die definiert sind durch $a_{n+1} = \text{mex}_i\{a_i+a_{n-i}\}$. Beispiel: (1,4,3,2) wird zu (1,4,3,2,0,0,0,0,0,5,1,1,1,1,1,6,2,2,0,...)
Anwendung: Die Mex-Folge liefert bei allen Spielen des Nim-Typs eine Gewinnstrategie (sie entsprechen dort den Sprague-Grundy Zahlen)!

Aufgabe:

- (schwierig) Berechne die Max-Folge aus {1,4,8}
- (schwierig) Berechne die Mex-Folge aus {1,4,8}

Palindrom-Zahlen

Ein Palindrom ist eine Zeichenkette, die von vorne genauso lautet wie von rückwärts gelesen. Beispiele wären etwa 'UHU', 'EBENE', '+..+..+' usw.
Auch Zahlen können die hübsche Eigenschaft besitzen, ein Palindrom zu sein: 5, 66, 7663667,...
Viele Zahlen besitzen diese Eigenschaft allerdings nicht. Deshalb versuchen wir sie mithilfe folgender Vorschrift zu einem Palindrom zu machen.

1.) Du beginnst mit einer Zahl N
2.) Ist die Zahl ein Palindrom? Wenn ja – fertig!
3.) Wenn nein: addiere die Zahl N zu ihrer Spiegelzahl N' und arbeite mit der Summe weiter.
4.) Mach weiter bei Punkt 2.)

Beispiel: 79 -> 79+97=176 -> 176+671= 847 -> 847+478=1325 -> 1325+5231=6556, und wir haben in 4 Schritten ein Palindrom erhalten

Aufgabe:

- Werden alle Zahlen von 1 bis 100 zu einem Palindrom? Welche Zahl benötigt die meisten Schritte?

- Genauso für die Zahlen bis 200
- Genauso für große Zahlenbereiche 2000 bis 2100 etc.
- Was ist jeweils die kleinste Zahl, die in 1, 2, 3,... Schritten zum Palindrom wird?
- (schwieriger): Wie ist die Situation in anderen Zahlenbasen? Die Zahl 22 ging in der Basis 2 in die Geschichte ein!